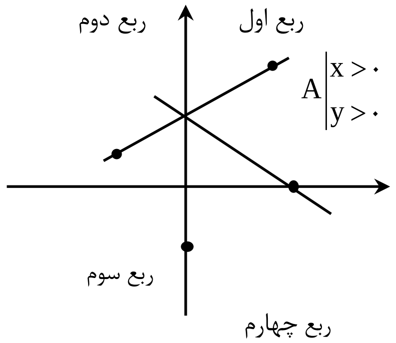
به نام خدا

درسنامه: ریاضی ۲ (رشته تجربی)

تهیه کننده: مریم درچه (کارشناسی ارشد ریاضی)

فصل اول



درس اول: هندسه تحلیلی)

نقطه و خط در دستگاه مختصات

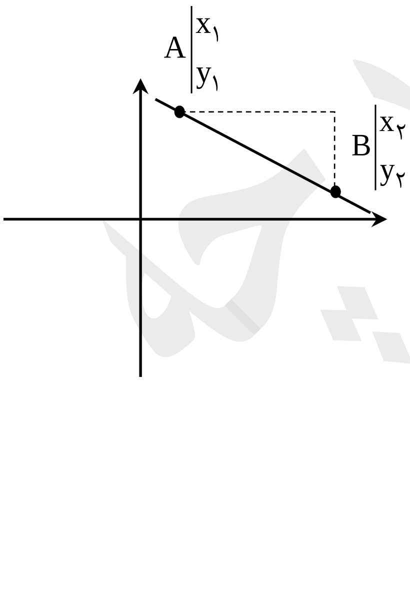
✍ از ۲ نقطه یک و تنها یک خط می‌گذرد.

محل برخورد هر خط با محور yها عرض از مبدأ و محل برخورد خط با محور xها طول از مبدأ نامیده می‌شود.

$x = 0 \rightarrow q$

$y = 0 \rightarrow p$

نقاطی که روی محور طول قراردارند، دارای عرض صفر و نقاطی که روی محور عرض قرار دارند دارای طول صفر هستند.

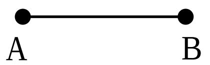


شیب خط

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب در واقع نسبت جابجایی عمودی به جابه‌جایی افقی را نشان می‌دهد.

✍ **نکته ۱: در خطوط افقی شیب صفر است.**



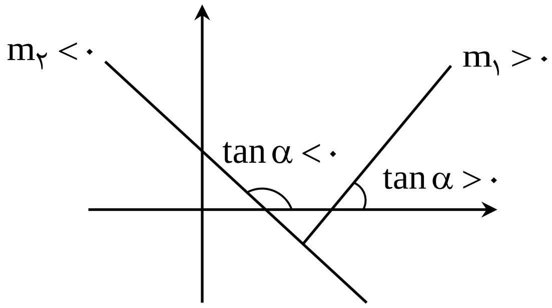
$$y_A = y_B$$

✍ **نکته ۲: در خطوط عمودی شیب تعریف‌نشده است.**

$$\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A = 0}$$

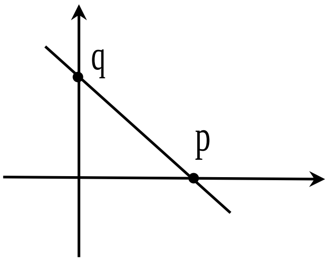
✍ **نکته ۳: شیب خط: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.**

مثال: شیب خطی که با محور X، زاویه ۶۰ درجه می‌سازد برابر $\tan ۶۰ = \sqrt{۳}$ است.



✍ **نکتهٔ ۴: با داشتن عرض از مبدأ q و طول از مبدأ p، شیب خط برابر است با:**

$m = ... = ...$



ضابطهٔ خط

معادلهٔ کلی و ساده‌شده خط به صورت $y = mx + b$ است که m شیب و b عرض از مبدأ است.

✍ **نکته۱: اگر معادلهٔ خط به صورت $ax + by + c = ۰$ باشد، می‌توان آن را به صورت $y = mx + b$ تبدیل کرد و شیب در این خط برابر است با:**

$$m = \frac{-(\text{ضریب } x)}{\text{ضریب } y} = \cdots$$

✍ **نکتهٔ ۲ (خطوط افقی و عمودی):**

معادله خطوط افقی: **y = b**

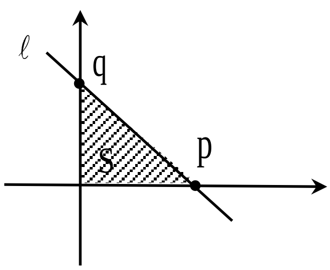
b محل تلاقی با محور y

معادله خطوط عمودی: **x=a**

a محل تلاقی با محور x

✍ **نکته۳: معادلهٔ خطوط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q برابر است با:**

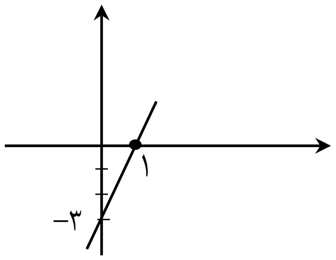
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$$



✍ **نکتهٔ ۴: مساحت مثلثی که خط ℓ با محورها می‌سازد برابر است با:**

$$S = \frac{۱}{۲}|p \times q|$$

مثال: مساحت مثلثی که خط $y = ۳x - ۳$ با محورها می‌سازد به دست آورید.



$$S = ...$$

اختلاف طول از مبدأ و عرض از مبدأ را بیابید.

نوشتن ضابطهٔ خط با کمک نقطه و شیب یا ۲ نقطه

باداشتن یک نقطه و شیب خط:

$$A\begin{bmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{bmatrix}, m$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

با داشتن ۲ نقطه

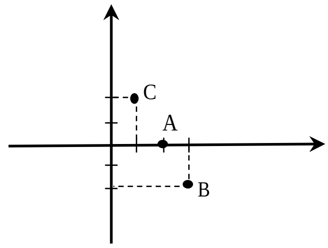
$$A\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix} \ , \ B\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$$

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویهٔ ۴۵ می‌سازد.

➢ تـمـریـن :

۱- آیا نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۳,-۲)$ و $C(۱,۲)$ در یک خط (بر یک استقامت) هستند؟ (کنترل ۲ شیب کافی است).



$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$

(شیب‌ها یکسان و نقطهٔ مشترک دارند)

۲- خط $۲x - ۳y = ۶$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟

ب) آیا با خط $y = \frac{۲}{۳}x - ۲$ موازی است؟

ج) این خط را رسم کنید و مساحت مثلثی که روی محورها می‌سازد، تعیین کنید.

۳ - معادله خطی را بنویسید که از $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد و محور طول را در $x = \frac{۲}{۳}$ قطع می‌کند.

وضعیت ۲ خط نسبت به هم

۱) دو خط موازی: دارای شیب یکسان هستند و عرض از مبدأ نامساوی $m = m'$ و $b \neq b'$

۲) دو خط منطبق: پس از ساده‌کردن دارای شیب و عرض از مبدأ مساوی $b = b'$ و $m = m'$

۳) دو خط متقاطع: دارای شیب‌های نامساوی $m \neq m'$

۴) دو خط عمود بر هم: شیب‌ها معکوس و قرینهٔ یکدیگرند. $m' = -\frac{۱}{m} \to mm' = -۱$

مثال: وضعیت دو خط $۲x - ۳y = ۴$ و $-۴x + ۶y + ۸ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-۳,۱)$ بگذرد و بر خط $۳x-y+۱=۰$ عمود باشد.

✍ نکته تستی(وضعیت دو خط نسبت به هم): اگر $m_۱$ و $m_۲$ شیب دو خط باشند و θ زاویهٔ بین دو خط داریم:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$ (اثبات با روابط مثلثاتی)

اگر $m_۱=m_۲ \Rightarrow \tan\theta=۰ \Rightarrow \theta=۰$

اگر $m_۱m_۲=-۱ \Rightarrow \tan\theta=$ ت ن $\Rightarrow \theta=۹۰$

✍ نکته: اگر خطی افقی به معادلهٔ $y=\beta$ باشد، خط عمود بر آن، عمودی $x=\alpha$ است.

✍ نکته: اگر خط عمودی به معادلهٔ $x=\alpha$ باشد، خط عمود بر آن افقی $y=\beta$ است.

مثال: زاویهٔ بین دو خط را در ۲ قسمت زیر بیابید.

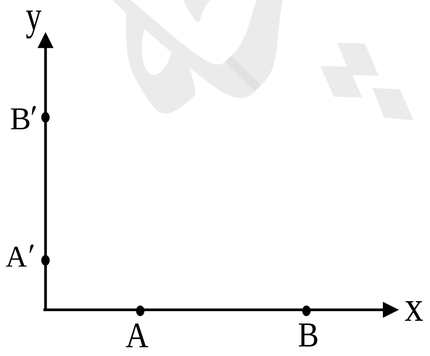
الف) $x-۵=۲\ ,\ y=-\frac{۱}{۳}$

ب) $۲x+y=۱\ ,\ ۳x-y-\frac{۱۶}{۳}=۰$

فاصلهٔ ۲ نقطه

فاصله روی محور xها: $|AB|=x_B-x_A$

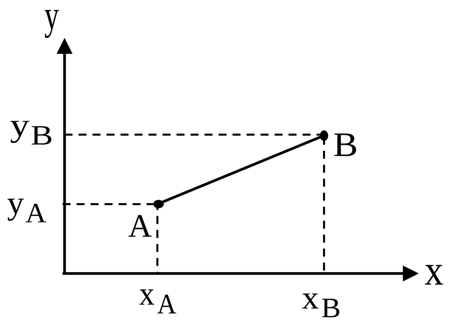
فاصله روی محور yها: $|A'B'|=y_{B'}-y_{A'}$



فاصلهٔ ۲ نقطه در صفحهٔ دستگاه مختصات:

(اثبات: با کمک قضیه فیثاغورث)

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$



محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث با داشتن ۳ رأس A و B و C

محیط $p=|AB|+|AC|+|BC|$

(اثبات با روش هندسی) مساحت $S=\frac{۱}{۲}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|$

➢ تـمـریـن :

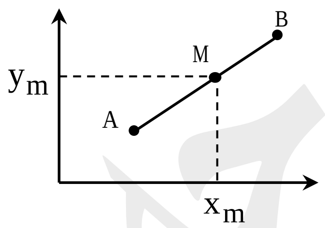
سه رأس مثلثی $A(۱,-۲)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۲,۳)$ است. محیط و مساحت مثلث را به دست آورید.

✍ **نکته: برای اینکه نشان دهیم یک مثلث قائم‌الزاویه است از ۲ روش می‌توان عمل کرد:**

۱- شیب دو ضلع در رابطهٔ $mm'=-۱$ صدق کند.

۲ـ با محاسبهٔ طول اضلاع رابطهٔ فیثاغورس بین آنها برقرار باشد.

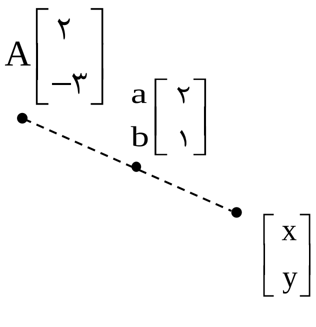
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط:



$$x_m=\frac{x_A+x_B}{۲}\quad,\quad y_m=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

مثال ۱: در مثلث ABC، با رئوس $A(-۱,۲)$ و $B(۰,۱)$ و $C(-۲,-۲)$ مطلوبست طول میانهٔ CM :

مثال ۲: قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ نسبت به نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ را بیابید.



$$\begin{cases}\dfrac{x+۲}{۲}=۲\Rightarrow x=۲\\[2mm]\dfrac{y-۳}{۲}=۱\Rightarrow y=۵\end{cases}$$

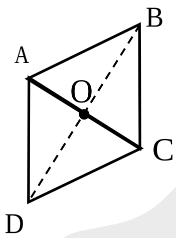
یا استفاده از فرمول قرینه: $(۲a - x\ , ۲b - y)$

تـمـریــن ۱ **:** در مثال (۱)، معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC را بنویسید.

تـمـریــن ۲ **:** در مثال (۱)، معادلهٔ ارتفاع AH را بنویسید.

✍ نکته۱: ویژگی رئوس متوازی‌الاضلاع

می‌دانیم که قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند پس نقطهٔ وسط دو قطر یکی است.



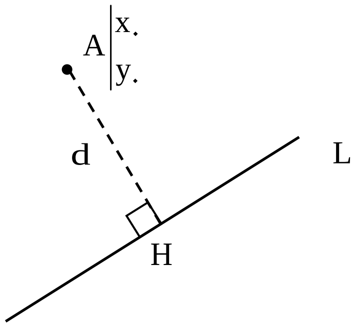
$$\begin{array}{l}\dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{x_B + x_D}{۲}\\[2mm] \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{y_B + y_D}{۲}\end{array} \Rightarrow A + C = B + D$$

✍ نکته ۲: اگر شرط بالا برقرار باشد و $AB = AD \Leftarrow$ **و شکل لوزی است.**

و اگر شرط بالا برقرار باشد و $AB = AD$ و $m_{AB} \times m_{AD} = -۱ \Leftarrow$ شکل مربع است.

مثال: در متوازی‌الاضلاع ABCD بارئوس $A\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$ و C و $D\begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}$، رأسA با C چقدر فاصله دارد؟

فاصلهٔ نقطه از خط



$$\ell : ax + by + c = ۰$$

$$d = \frac{|ax_. + by_. + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

محاسبهٔ این فرمول به این صورت است که ابتدا ضابطه خط AH را می‌نویسیم و سپس محل تلاقی را با خط ℓ در دستگاه دو معادله دو مجهول می‌یابیم که H می‌باشد سپس طول AH را محاسبه می‌کنیم.

دقت کنیم که جملات معادلهٔ ℓ همه باید در یک‌طرف مساوی باشند.

✍ **نکته ۱: فاصلهٔ مبدأ از خط ℓ برابر است با:**

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

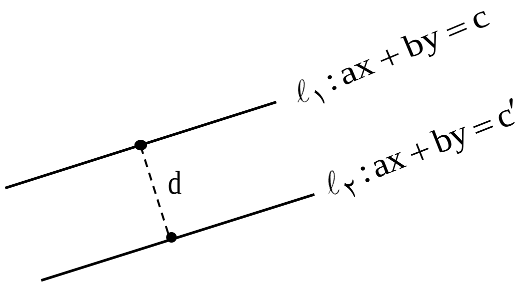
✍ **نکته ۲: فاصله نقطهٔ $A(x_., y_.)$ از خط $x = \alpha$ برابر است با** $|x_. - \alpha|$

و از خط $y = \beta$ برابر است با $|y_. - \beta|$

و بنابراین فاصله از محور طول برابر .... و از محور عرض برابر .... است.

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ از مبدأ و از محور y و از خط $x = -۳$ به دست آورید و سپس از خط $۲x - y + ۱ = ۰$ را بیابید.

فاصلهٔ دو خط موازی:

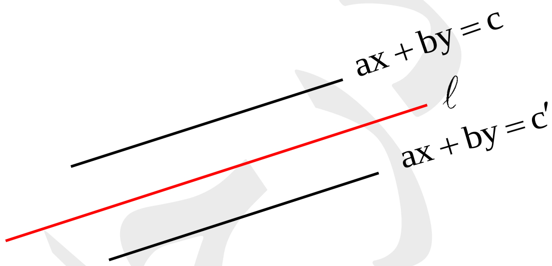


$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}$$

ـ محاسبهٔ این فرمول به این صورت است که یک نقطه دلخواه روی یکی در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از خط دیگر با فرمول قبلی محاسبه می‌کنیم.

ـ دقت کنیم جملات دو معادله به صورت بالا باشند و در صورت نیاز معادلات ساده شوند تا ضرایب x و y مثل هم شوند. (دو خط موازی دارای شیب یکسان، هستند) $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$

معادلهٔ خط وسط و موازی با دو خط موازی:

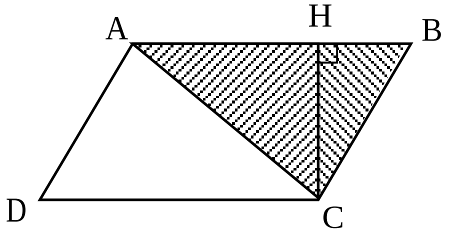


$$\ell : ax + by = \frac{c + c'}{۲}$$

مثال: دو خط موازی با خط $y = -\frac{۳}{۴}x$ از ۲ نقطه $A(۱,۰)$ و $B(۱,۱)$ رسم کرده‌ایم. مساحت مربعی که دو ضلع مقابلش روی این دو خط قرار دارد، پیدا کنید.

تمرینات کلی

تـمـریـن ۱ : نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۳,۵)$ و $C(-۱,۷)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.



تـمـریـن ۲ : نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۶,۲)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس یک مثلث هستند. محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث را بیابید. (راهنمایی: کافی است محل برخورد دو عمودمنصف را بیابید)

درس دوم: تابع درجه دوم و معادله درجه دوم)

تابع درجه ۲ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$

معادله درجه ۲ : $f(x) = ۰ \Rightarrow ax^{۲} + bx + c = ۰$

$$\text{حل}: \Delta = b^{۲} - ۴\,a\,c \begin{cases} \Delta > ۰ \;\rightarrow\; \text{۲ جواب} \;\Longrightarrow x_{۱} \text{ و } x_{۲} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲\,a} \\ \Delta = ۰ \;\rightarrow\; \text{یک جواب} \;\Longrightarrow x = \dfrac{-b}{۲\,a} \\ \Delta < ۰ \;\rightarrow\; \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

حالات خاص:

معادله ۲ جواب: $ac < ۰ \Rightarrow$

$$a + b + c = ۰ \Longrightarrow x_{۱} = ۱ \quad x_{۲} = \frac{c}{a}$$

$$a + c = b \Longrightarrow x_{۱} = -۱ \qquad x_{۲} = -\frac{c}{a}$$

یادآوری تعیین علامت عبارت درجه ۲:

$\Delta < ۰$

x	
y	موافق علامت a

$\Delta = ۰$

x			
y	موافق a	۰	موافق a

$\Delta > ۰$

x		$x_{۱}$		$x_{۲}$	
y	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

حل با معادله درجه دوم با روش تغییر متغیر:

گاهی با تغییر شکل یک معادله را به صورت معادله درجه دوم در می آوریم و با روش حل معادله درجه دوم، به جواب می رسیم.

مثال ۱:

$$x^{۶} - ۷x^{۳} - ۸ = ۰ \qquad x^{۳} = u$$

$$u^{۲} - ۷\,u - ۸ = ۰ \Rightarrow (u - ۸)(u + ۱) = ۰ \begin{cases} u = ۸ \Rightarrow \boxed{x = ۲} \\ u = -۱ \Rightarrow \boxed{x = -۱} \end{cases}$$

مثال ۲:

$$۴^{x} + ۲^{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{۲^{x} = u} u^{۲} + u - ۶ = ۰$$

مثال ۳:

$$(x^{۲} + x + ۱)^{۲} + ۲\,x^{۲} + ۲\,x - ۱۳ = ۰$$

تـمـریـن * : معادله های زیر را حل کنید.

$$x^{۵} - ۳۰\,x^{۲}\sqrt{x} - ۶۴ = ۰$$

$$۲\left(x + \frac{۱}{x}\right)^{۲} - ۷\left(x + \frac{۱}{x}\right) + ۵ = ۰$$

حل معادله درجه ۴ با روش تغییر متغیر (معادله ۲ مجذوری):

الف) $x^۴ - ۵x^۲ + ۴ = ۰$

$$x^۲ = u \Rightarrow u^۲ - ۵u + ۴ = ۰ \Rightarrow (u-۱)(u-۴) = ۰ \begin{cases} u = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \\ u = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} \end{cases}$$

ب) $x^۴ - ۵x^۲ - ۳۶ = ۰$

جمع و ضرب ریشه های معادله درجه ۲

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم باشند، همواره داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} == -\frac{b}{a}$$

$$p = \alpha.\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{b^۲ - \Delta}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - b^۲ + ۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

مثال: مجموع و حاصلضرب ریشه های $x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ برابر است با: $S = ۵$ و $p = -۲$

با داشتن s و p و Δ در مورد ریشه ها می توان بحث کرد.

مثال: اگر $s < ۰$ و $p > ۰$ و $\Delta > ۰$ باشد، در مورد ریشه ها چه می توان گفت؟

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن s و p:

$x_۲$ و $x_۱$ ریشه ها $\leftrightarrow x^۲ - sx + p = ۰$ و $x_۱ + x_۲ = s$ و $x_۱x_۲ = p$

$$a(x-x_۱)(x-x_۲) = a\left(x^۲ - \underbrace{\left(x_۱ + x_۲\right)}_{-\frac{b}{a}}x + \underbrace{x_۱x_۲}_{\frac{c}{a}}\right)$$

شکل کلی معادله درجه ۲ $ax^۲ + bx + c = ۰$ =

پس کافی است دو طرف معادله درجه ۲ را بر a تقسیم کنیم تا به فرم $x^۲ - sx + p = ۰$ درآید.

مثال ۱) محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب برابر ۴۸ و ۱۴۳ است. طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

مثال ۲) معادله درجه دوم بنویسید که مجموع ریشه هایش ۴ و ضربشان ۳/۷۵ باشد.

نکات تستی:

۱-نوشتن معادله ای که ریشه هایش یک رابطه خاص با ریشه های معادله دیگر دارند

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\beta\alpha^۲$ و $\alpha\beta^۲$ باشند اگر α و β ریشه‌های $۲x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند.

۲- اگر ریشه ها عکس شوند: $ax^۲ + bx + c = ۰ \Leftarrow cx^۲ + bx + a = ۰$

۳- ریشه ها قرینه شوند: $ax^۲ + bx + c = ۰ \Leftarrow ax^۲ - bx + c = ۰$

۴-روابط بین ریشه ها با محاسبه s و p:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = s^۲ - ۲p$$

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ = s^۳ - ۳sp$$

$$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{s + ۲\sqrt{p}}$$

$$|x_۱ - x_۲| = \sqrt{s^۲ - ۴p} \quad \text{و} \quad |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{s}{p}$$

(اثبات با کمک اتحادها)

مثال ۱: در معادله ی درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ حاصل $\frac{۱}{x_۲^۲} + \frac{۱}{x_۱^۲} + x_۲^۲ + x_۱^۲$ چیست؟

نکته: اگر ۲ ریشه قرینه باشند $\leftarrow$ $S = \frac{-b}{a} = ۰$ و $\Delta > ۰$

اگر ۲ ریشه معکوس باشند ← $P = \frac{c}{a} = ۱$ و $\Delta > ۰$

نکته ۲: گاهی برای محاسبه بعضی از روابط، نیاز به داشتن s و p نیست.

تست : اگر در معادله ی $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ، ریشه ها $x_۱$ و $x_۲$ باشند، حاصل $\frac{x_۱^۲ - ۳x_۱}{x_۲ + \frac{۱}{x_۲}}$ را بیابید.

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

تمرینات کلی:

تـــمـریـــن ۱) مقدار m را طوری بیابید که در معادله ی $x^۲ + ۳x + m + ۳ = ۰$ یکی از ریشه ها دو برابر دیگری باشد.

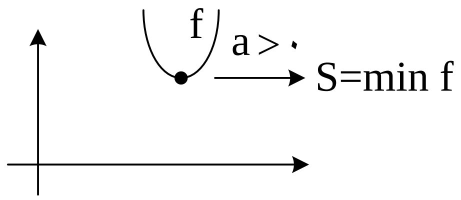
تـــمـریـــن ۲) معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه هایش $\sqrt{۳} - ۲$ باشد.

تـــمـریـــن ۳) m را طوری بیابید که در معادلهٔ $x^۲ - ۲x + m + ۲ = ۰$ یکی از ریشه ها مجذور دیگری باشد.

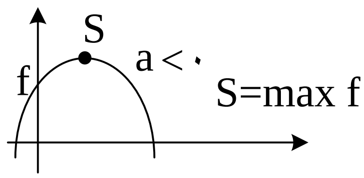
تـــمـریـــن ٤) در معادله ی درجه دوم $mx^۲ + (m-۱)x + ۳m - ۱ = ۰$، m را طوری بیابید که یکی از ریشه ها معکوس قرینه ریشه دیگر باشد. (دقت کنیم که وقتی $\frac{c}{a} < ۰$ پس $\Delta > ۰$)

ماکسیمم و مینیمم سهمی (تابع درجه ۲)

$y = ax^{2} + bx + c \qquad S = \left(-\frac{b}{2a} \text{ و } -\frac{\Delta}{4a}\right)$

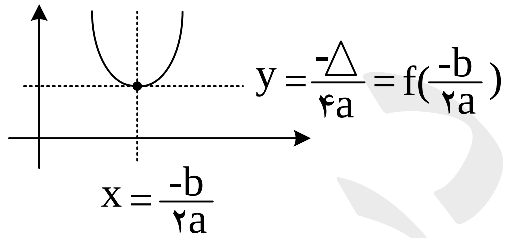


بیشترین یا کمترین مقدار تابع $= f\left(-\frac{b}{2a}\right)$



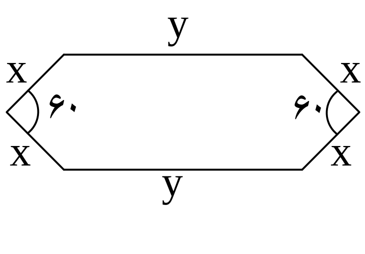
نکته: اگر سهمی به شکل $y = a(x+h)^{2} + k$ باشد، راس سهمی $S = \left(-h \text{و} k\right)$ است.

نکته: محور تقارن سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ و خط مماس بر سهمی در رأس $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است.



مثال) محور تقارن یک سهمی خط $x = 3$ وخط $y = 1$ در رأس بر آن مماس است و از نقطه ی (۹و۱) می گذرد، ضابطه سهمی را بنویسید.

تــمــریــن * **:** با طنابی به طول ۵۲ متر می خواهیم زمینی به شکل زیر را محصور کنیم. x و y را چقدر انتخاب کنیم تا مساحت زمین ماکسیمم شود؟

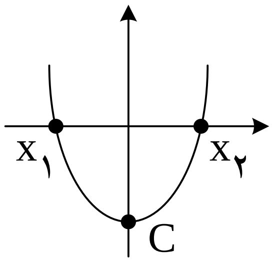


صفرهای تابع درجه دوم

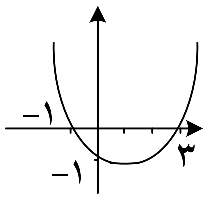
تعریف: صفرهای تابع $f(x)$ همان محل برخورد تابع با محور x هاست در واقع صفرهای تابع جواب معادله‌ی $f(x) = ۰$ است(جایی که عرض برابر صفر است) و همچنین عدد ثابت c محل برخورد تابع با محور yهاست.

$x_۱$ و $x_۲$ صفرهای تابع

$f(x) = ax^۲ + bx + c$

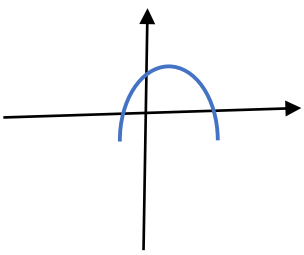


مثال) ضابطه ی تابع زیر را بنویسید.



نکته: با توجه به نمودار هر تابع می توانیم علامت ضرایب a و b و c و نیز علائم s و p و Δ را تشخیص دهیم.

مثال: با توجه به شکل زیر علائم a و b و c، Δ وs و p را تعیین کنید.



سهمی به سمت پایین $\rightarrow a < ۰$

در ناحیه اول $\frac{-b}{۲a} > ۰ \rightarrow b > ۰$

$c > ۰$

۲ ریشه دارد ← $\Delta > ۰$ و ریشه ها مختلف العلامه $P = \frac{c}{a} < ۰$

و ریشه بزرگتر مثبت $\frac{-b}{a} = S > ۰$

مثال: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + ۱$ در نقطه ی $x = ۱$ محور طول را قطع کند.

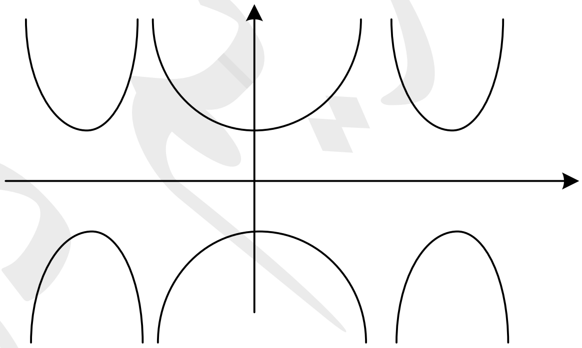
$$\left.\begin{matrix} \Delta = ۰ \;\rightarrow b^{۲} - ۴\,ac = ۰ \rightarrow b^{۲} - ۴\,a = ۰ \\ -\dfrac{b}{۲\,a} = ۱ \;\rightarrow b = -۲\,a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow ۴a^{۲} - ۴\,a = ۰$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} a = ۱ \quad \text{یا} \quad a = ۰ \;\; \text{غ ق ق} \\ b = -۲ \end{matrix}$$

نکات تستی:

محل قرار گرفتن سهمی در دستگاه مختصات

۱) $\Delta < ۰$ از ۲ ناحیه نمی گذرد

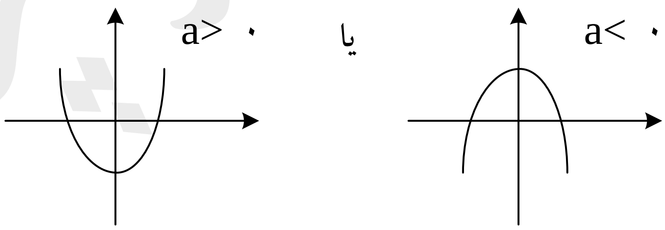


a> ۰

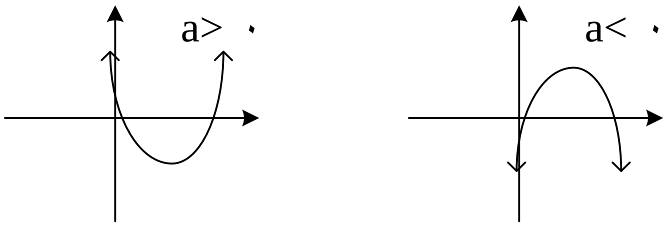
یا

a< ۰

۲) $\frac{c}{a} < ۰$ ریشه ها مختلف العلامه ← سهمی در ۴ ناحیه

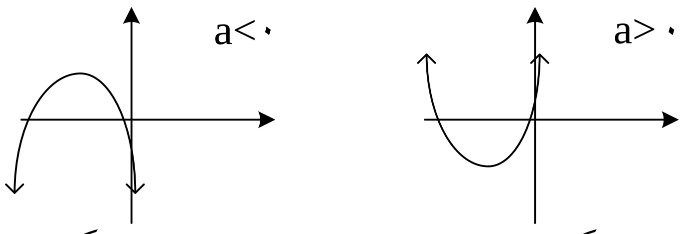


۳) ۲ ریشه مثبت $\begin{cases} \Delta > ۰ \\ S > ۰ \\ P > ۰ \end{cases}$



از ناحیه سوم نمی گذرد　　　از ناحیه دوم نمی گذرد

۴) ۲ ریشه منفی $\begin{cases} \Delta > ۰ \\ P > ۰ \\ S < ۰ \end{cases}$



از ناحیه اول نمی گذرد   از ناحیه چهارم نمی گذرد

مثال: به ازای چه مقدار m منحنی $y = (m - ۱)x^۲ + mx + (m^۲ - ۴)$ از چهار ناحیه می‌گذرد؟

تست : اگر $y = m^۲x^۲ - ۳\ \ x + m + ۲$ محور x ها را در مبدأ قطع کند، نمودار تابع از کدام ناحیه نمی گذرد؟

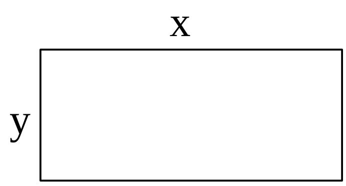
الف)اول   ب)دوم   ج)سوم   د)چهارم

معادلات گویا

مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن مقدار ثابت $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است. ویژگی این مستطیل این است که:

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}}$$

$$\frac{y+x}{x} = \frac{x}{y}$$



برای حالت $y = ۱$ مقدار x را می یابیم تا مستطیل طلایی باشد.

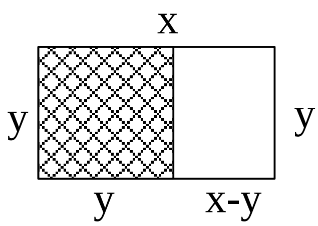
$$y = ۱\ \rightarrow \frac{۱ + x}{x} = \frac{x}{۱} \Longrightarrow x^۲ - x - ۱ = ۰$$

$$x = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\ \ \text{غ ق ق} \qquad \text{و} \qquad x = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\ \ \text{ق ق}$$

نکته ۱: در مستطیل طلایی نسبت عرض به طول برابر است با $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

زیرا $\frac{y}{x} = \frac{۲}{۱+\sqrt{۵}} \times \frac{۱-\sqrt{۵}}{۱-\sqrt{۵}} = \frac{۲(۱-\sqrt{۵})}{۱-۵} = \frac{۲(\sqrt{۵}-۱)}{۲} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

نکته ۲: اگر از این مستطیل طلایی یک مربع جدا کنیم، مستطیل حاصل باز هم طلایی است.



روش حل معادله گویا:

۱- ابتدا ریشه های مخرج را به دست می آوریم.

۲- ک م م مخرج ها را در دو طرف تساوی ضرب می کنیم.

۳- پس از ساده کردن رابطه، ریشه ها را محاسبه می کنیم.

۴- چک می کنیم ریشه ها همان ریشه های مخرج نباشد و در معادله گویا صدق کنند.

مثال ۱:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4=(x+2)(x-2)} \qquad D=R-\{2 \text{ و } -2\}$$

ک م م را در دو طرف ضرب می کنیم.

حل: ک م م $=(x+2)(x-2)$

$$\Longrightarrow (x+1)(x+2)+1(x-2)=x$$

$$\Longrightarrow x^2+3x+2+x-2=x \;\Longrightarrow x^2+3x=0$$

$$\longrightarrow \quad x=0 \text{ ق ق } \quad x=-3 \text{ ق ق}$$

مثال ۲:

$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x-6}{\underbrace{x^2-3x+2}_{(x-2)(x-1)}}$$

تمرین ۱ : دو نقاش اگر با هم کار کنند، خانه ای را در ۳ روز رنگ می کنند. اما نقاش اول خانه را به تنهایی ۸ روز زودتر از نقاش دوم رنگ می زند. حساب کنید هر کدام از نقاش ها خانه را در چند روز رنگ می کنند.

تمرین ۲※: در معادله ی $\frac{x-۲}{x^۲-x} = \frac{k}{x+۱} + \frac{x}{x^۲-۱}$ مقدار $(k < ۰)$ را طوری بیابید که معادله ریشه منفی نداشته باشد. سپس ریشه ی دیگر معادله را نیز به دست آورید.

معادلات رادیکالی

روش حل معادله رادیکالی

۱) ابتدا دامنه را به دست می آوریم. $P(x) = \sqrt{Q(x)} \rightarrow Q(x) \geq ۰$ و $p(x) \geq ۰$

۲) دو طرف معادله تا جایی که رادیکال هست، به توان ۲ می رسانیم.

مثال ۱)

$$۱ - \sqrt{۲ - x} = ۲\,x \qquad ۲ - x \geq ۰ \rightarrow x \leq ۲$$

حل: $۱ - ۲\,x = \sqrt{۲ - x}$ دامنه: $۱ - ۲\,x \geq ۰ \rightarrow \boxed{x \leq \frac{۱}{۲}}$

به توان ۲ $\Longrightarrow (۱ - ۲\,x)^۲ = ۲ - x$

$$۱ - ۴\,x + ۴x^۲ = ۲ - x \Longrightarrow ۴x^۲ - ۳\,x - ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۲۵}}{۸} \begin{cases} \frac{۳+۵}{۸} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۸} = \boxed{-\frac{۱}{۴}} \end{cases}$$

مثال: روی محور x نقاطی بیابید که فاصله آنها از $\left(\text{۲ و ۱}\right)$ برابر ۳ باشد.

نکته: مجموع دو رادیکال، همواره مثبت یا صفر است و مجموع عدد مثبت و رادیکال همواره مثبت است.

مثال ۲: $\sqrt{x^{۲}+x-۱}+۵=۰$ جواب ندارد.

مثال ۳: معادله ی $\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}=۱$ را حل کنید. (گاهی نیاز است ۲ بار به توان ۲ برسانیم.)

مثال ۴) معادله ی زیر چند جواب دارد؟

$$\sqrt{x-۳}+\sqrt{۲۵+\sqrt{۳-x}}=۵$$
$$x\geq ۳ \qquad\qquad x\leq ۳$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

فصل دوم ــ هندسه

ترسیم هندسی

نکات مربوط به فعالیت صفحه ی ۲۶ کتاب درسی و نکات دیگر:

۱ـ همه نقاطی که از نقطهٔ o به فاصلهٔ r هستند، روی دایره‌ای به مرکز o و شعاع r هستند.

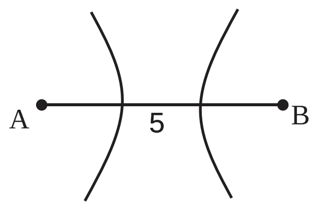
۲- همه نقاطی که از خط d به فاصله ثابت L هستند، روی دو خط موازی به فاصلهٔ L از خط d قرار دارند.

۳- با داشتن سه ضلع a و b و c از یک مثلث، می‌توان آن را رسم کرد. باید مجموع دو ضلع > ضلع دیگر

طریقهٔ رسم: یک ضلع را رسم می‌کنیم و از دو سر آن دو کمان به اندازهٔ دو ضلع دیگر می‌زنیم.

مثال: برای رسم مثلث با اضلاع ۵ و ۲ و ۱ کمان‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند زیرا

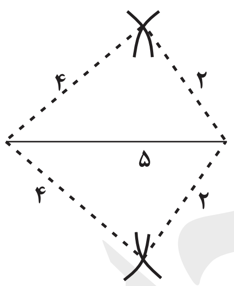
۱+۲<۵



نکته: در صورت رسم همواره ۲ مثلث داریم که هم‌نهشتند.

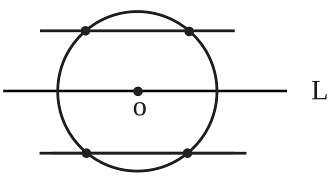
مثال: مثلثی با اضلاع ۵ و ۴ و ۲ رسم کنید.

تعداد مثلث = ۱



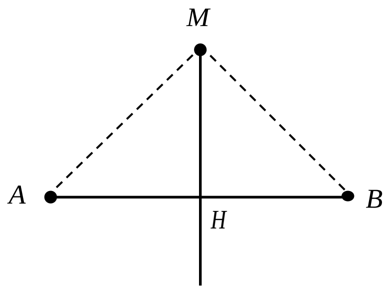
مثال: چند نقطه در صفحه هست که از نقطهٔ o روی خط L به فاصلهٔ ۵ و از خط L به فاصله ۳ باشند.

طریقه رسم: ابتدا دایره‌ای به شعاع ۵ و به مرکز o می‌زنیم و سپس ۲ خط به موازات L به فاصله ۳، محل تقاطع ۴ نقطه است.



در مثال قبل دقت کنید که اگر فاصله از خط بیش از ۵ باشد، نقطه‌ای به دست نمی‌آید.

عمود منصف:



خطی که بر وسط یک پاره‌خط عمود می‌شود.

$AH = HB$

ویژگیهای عمودمنصف:

- هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

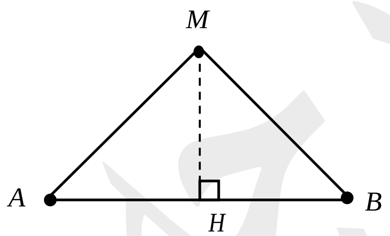
$$\left.\begin{array}{l} \text{اثبات:}\quad H_۱ = H_۲ = ۹۰ \\ H \text{ وسط} \quad AH = HB \\ \text{مشترک } MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

$$\xrightarrow{\text{سایر اجزا برابر}} MA = MB$$

۲- هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف است.

می‌دانیم $MA = MB$

آیا M روی عمودمنصف است؟

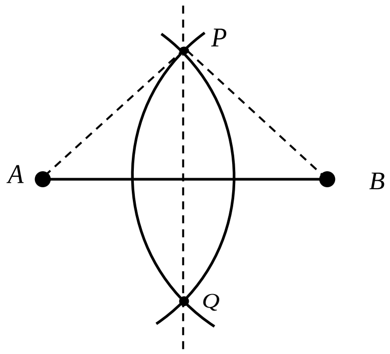


از M به وسط AB وصل می‌کنیم تا در H، AB را قطع کند. اگر MH عمود بر AB باشد، MH عمودمنصف است.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{r} H \text{ وسط } AH = HB \\ \text{مشترک } MH \\ AM = MB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\Delta}{M}H \cong B\overset{\Delta}{M}H \Rightarrow \left.\begin{array}{c} H_۱ = H_۲ \\ H_۱ + H_۲ = ۱۸۰ \end{array}\right\} \underset{\text{عمودمنصف}}{\Rightarrow MH}$$

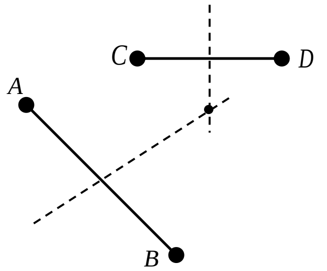
رسم عمودمنصف



ـ برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB از دو سر A و B کمان به اندازهٔ بیش از نصف AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در ۲ نقطه p و Q قطع کنند.

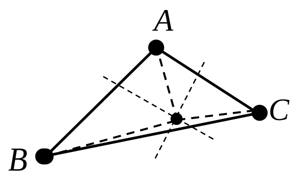
PQ عمودمنصف است. چرا؟

مثال ۱: چند نقطه وجود دارد که از دو سر AB و از دو سر CD به یک فاصله باشند.



مثال ۲: چند نقطه در صفحهٔ مثلث هست که از ۳ رأس به یک فاصله باشد.

جواب: یک نقطه، محل تلاقی عمود منصف‌های ۳ ضلع زیرا:

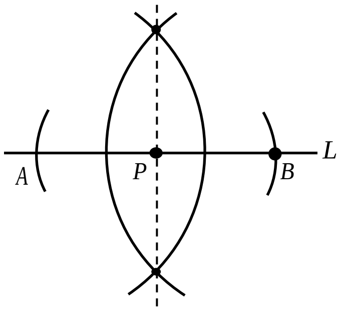


$$\left.\begin{array}{ll} \text{روی عمودمنصف ضلع AC} & \Longrightarrow oA = oC \\ \text{روی عمودمنصف ضلع BC} & \Longrightarrow oB = oC \\ \text{روی عمودمنصف ضلع AB} & \Longrightarrow oA = oB \end{array}\right\} \Longrightarrow oA = oB = oC$$

نکته ۱: محل همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع هر مثلث، از سه رأس به یک فاصله است.

رسم خط عمود بر L از نقطه‌ای روی آن مثل p

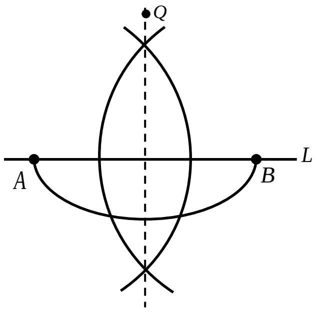
ـ ابتدا دایره‌ای به مرکز P می‌زنیم تا خط را در A و B قطع کند. سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.



چرا نقطه P روی عمودمنصف AB است؟ زیرا P وسط AB است.

عمودمنصف AB بر خط L عمود است.

رسم خط عمود بر خط L از نقطه‌ای خارج از آن مثل Q.

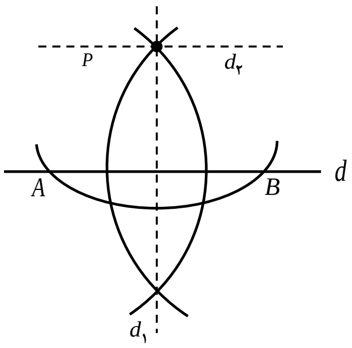


ابتدا کمانی به مرکز Q و بیش از فاصله Q از L می‌زنیم تا خط L را در A و B قطع کند. سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

<u>چرا Q روی عمودمنصف است؟</u> ***زیرا از دو سر A و B به یک فاصله است.***

عمودمنصف AB، بر خط L عمود است.

رسم خط موازی با خط d، از نقطهٔ p خارج آن



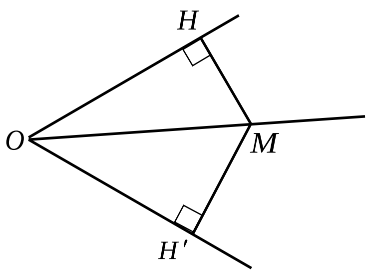
ابتدا از p خارج خط d، عمودی بر d به نام $d_۱$ رسم می‌کنیم و سپس از p روی $d_۱$ خطی بر $d_۱$ به نام $d_۲$ عمود می‌کنیم. چون زاویه‌ها همه ۹۰ همه درجه‌اند، پس خط $d_۲$ و d موازیند.

تمرین * : چگونه می‌توان با داشتن اضلاع b و c و ارتفاع ha، یک مثلث را رسم کرد؟

نیمساز

نیمساز هر زاویه، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ویژگیهای نیمساز:



۱ـ هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، یک فاصله دارد.

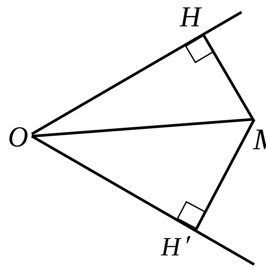
$$\left.\begin{array}{r} \text{نیمساز} \rightarrow \ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \text{مشترک} \quad OM \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMH'}$$

$$\Rightarrow MH = MH'$$

۲- هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز قرار دارد.

اگر بدانیم: $MH = MH'$

از M به O وصل می‌کنیم. آیا MO نیمساز است؟



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH' \\ \text{مشترک} \quad OM \\ H_1 = H_2 = 90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\Delta}{M}H \cong O\overset{\Delta}{M}H'$$

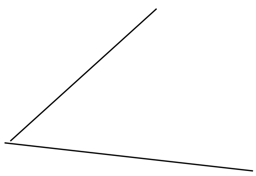
$$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\Rightarrow \text{نیمساز} \quad OM$$

نکته۲: محل همرسی نیمسازهای هر مثلث، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. چرا؟

رسم نیمساز:

چگونه یک نیمساز برای یک زاویه رسم کنیم؟



نسبت و تناسب:

تناسب یعنی: برابری دو نسبت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ویژگی‌های تناسب:

طرفین وسطین

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times bd} ad = bc$

۲) $ad = bc \xrightarrow{\div bd} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **و برعکس:**

تعویض طرفین یا وسطین:

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{cases} \xrightarrow{\times \frac{b}{c}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \end{cases}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c} \end{cases}$ ترکیب در صورت و مخرج

اثبات ۴

$$ad = bc \xrightarrow{+ac} ad + ac = bc + ac \to$$

$$a(d+c) = c(b+a) \longrightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{cases}$ $\quad \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$

تفضیل درصورت و مخرج

اثبات۵

برای اولی کافیه دو طرف را منهای یک کنیم و دومی:

$$ad = cb \xrightarrow{-ac} ad - ac = cb - ac$$

$$\to a(d-c) = c(b-a) \to \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

۶) $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{f} = \cdots = \frac{m}{n} = \frac{a+b+e+\cdots+m}{b+c+f+\cdots+n}$

اثبات دوتایی : $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \to ac = bd \xrightarrow{+ab} ac + ab = bd + ab \to$

$$a(c+b) = b(a+d) \to \frac{a+d}{b+c} = \frac{a}{b}$$

تست: اگر $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۲} = \frac{c}{۳} = \frac{d}{۴}$ باشد، $a+b+c+d$ چند برابر a است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۲۰

استدلال – قـضــیه

۱ـ استدلال استقرایی: با بررسی یک موضوع در چند حالت به یک نتیجهٔ کلی برسیم (از جز به کل رسیدن)

مثال: رسم چند مثلث و اندازه‌گیری جمع زوایا ← جمع زاویه های هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۲ـ استدلال استنتاجی: براساس اصولی که از قبل درستی آنها را پذیرفته‌ایم به نتیجه کلی برسیم.

* **قـضیـه :** به نتیجهٔ قطعی حاصل از استدلال استنتاجی گوییم.

یک عبارت شرطی که همواره درست است.

$$\underbrace{p}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\text{حکم}}$$

مثال:

* **عکس قضیه:** اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه را داریم.

گزاره شرطی جدید را **عکس قضیه** گوییم. $q \Rightarrow p$

نـکتـه : عکس قـضیـه مـی‌تـوانـد درست یـا نـادرست بـاشد.

مثال:

* **قـضیـه :** در متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

* **عکس قـضیـه :**

* **قـضیـه دو شرطی :** اگر قضیه و عکس قضیه هر دو درست باشند به آن قضیه دوشرطی می‌گوییم

و می‌نویسیم: $p \Leftrightarrow q$

و می‌خوانیم: p اگر و تنها اگر q

مثال ۱: یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است <u>اگر و تنها اگر</u> قطرهای چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند.

مثال ۲: آیا عکس عبارت <u>"در متساوی‌الساقین، زاویه‌های زیر ساق‌ها برابرند"</u> درست است؟ و دو شرطی؟

مثال ۳: آیا عبارت <u>"هر دو زاویه ۹۰ درجه مکمل‌اند"</u> به صورت قضیه دوشرطی پذیرفته می‌شود؟

مثال ۴: قضیه فیثاغورث دو شرطی است. عکس آن را به عنوان تمرین اثبات کنید. (کار در کلاس کتاب)

برهان خلف

در این نوع استدلال، فرض می‌کنیم که حکم نمی‌تواند درست باشد.

روش:

{حکم نادرست، فرض درست} ← استدلال ← {فرض نادرست یا تناقض} ← حکم درست

مثال: اگر $n^{۲}$ زوج باشد، آنگاه n زوج است.

نکته : برای نشان دادن یک حکم کلی درست، استدلال استنتاجی نیاز است و برای نادرستی: مثال نقض

مثال نقض: برای رد کردن یک حکم کلی نیاز به مثال نقض است.

مثال ۱: آیا "همهٔ اعداد اول فردند"؟ چرا؟

عدد ۲ مثال نقض $\rightarrow$ مجموعه اعداد اول $\in ۲$

مثال ۲: آیا حکم "جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است" درست است؟ چرا؟

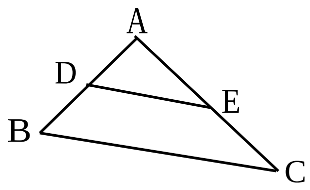
تمرین: آیا احکام زیر درست هستند؟ چرا؟

۱) برای هر n طبیعی، $n^{۲}+n+۳$ عددی اول است.

۲) توان دوم هر عدد از آن بزرگ‌تر است.

۳) ارتفاع هر مثلث داخل یا خارج مثلث است.

❋ **قضیهٔ تالس** : اگر در مثلثی خطی موازی یکی از اضلاع رسم شود، نسبت پاره‌خط‌های ایجادشده روی دو ضلع دیگر با هم برابر است.



فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

اثبات در فعالیت صفحه ۳۴ کتاب مرحله به مرحله توسط دانش‌آموزان انجام شود.

تعمیم قضیه تالس

پس از حل فعالیت صفحه ۳۵ نتایج زیر را داریم.

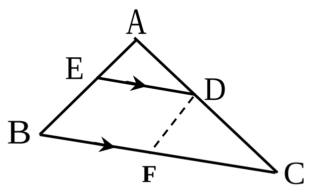
۱) ترکیب در مخرج

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}\rightarrow\frac{AD}{BD+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

۲) تفضیل در صورت پس از معکوس کردن رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

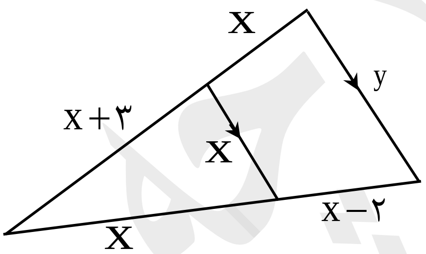
$$\rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\Longrightarrow\frac{AB-AD}{AD}=\frac{AC-AE}{AE}\Longrightarrow\boxed{\frac{BD}{AD}=\frac{EC}{AE}}$$

۳) با اضافه کردن خط DF موازی با AB، جزئی دیگر به تناسب می‌افزاییم.

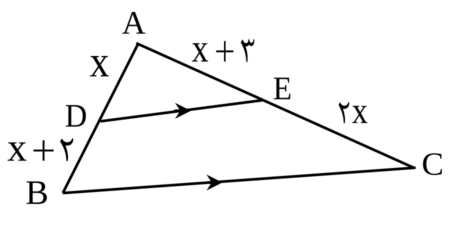


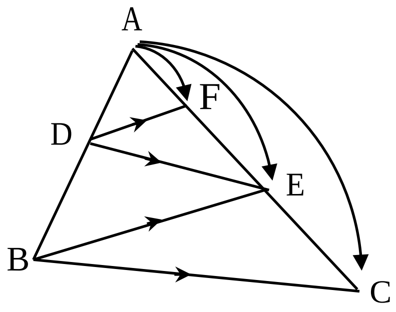
$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}\overset{?}{=}\frac{ED}{BC}$$

مثال ۱: در شکل زیر x و y را بیابید.



مثال ۲: اگر $BC\parallel DE$، مقدار x را بیابید.

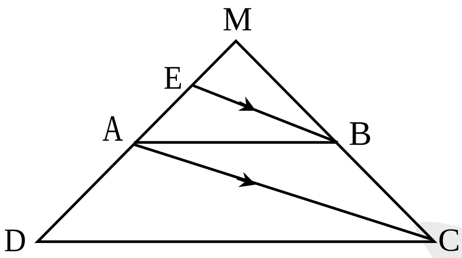




تمرین: اگر $CB \| ED$ و $EB \| FD$ ثابت کنید AE واسطهٔ هندسی بین AF و AC است. یعنی $AE^{۲} = AF.AC$

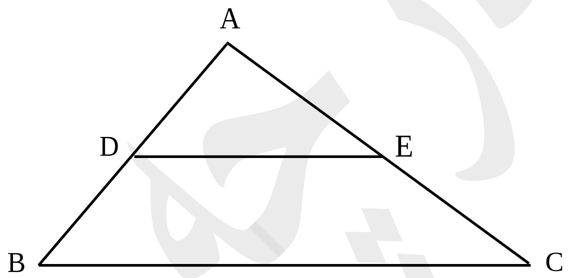
نکتهٔ تستی: **(فلش بزرگ) × (فلش کوچک) = ²(فلش متوسط)**

تست: در ذوزنقه ABCD، پاره‌خط BE موازی قطر AC است، اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟



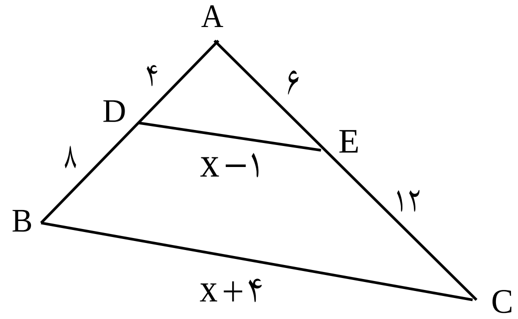
۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲/۷۵

عکس قضیه تالس: اگر خطی اضلاع AB و AC از مثلث ABC را در نقاط D و E قطع کند و تناسب $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ را داشته باشیم آنگاه این خط و ضلع BC موازی هستند.

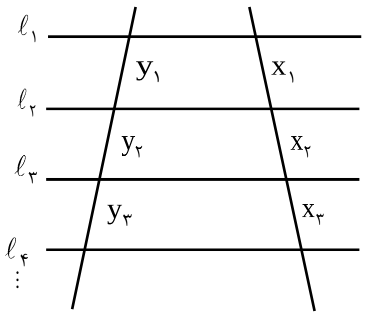


اثبات با برهان خلف:

مثال: **در شکل مقابل مقدار x را بیابید.**



حالت کلی تالس: اگر چندین خط موازی داشته باشیم و ۲ خط آنها را قطع کنند، روی آنها قطعات متناسب ایجاد می‌شود.

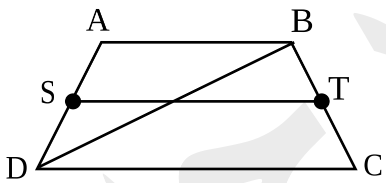


$$\ell_{۱} \parallel \ell_{۲} \parallel \ell_{۳} \parallel \ell_{۴} \parallel \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{x_{۱}}{y_{۱}} = \frac{x_{۲}}{y_{۲}} = \frac{x_{۳}}{y_{۳}} = \ldots$$

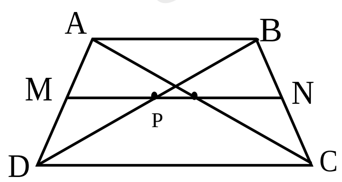
چند نکته تستی در ذوذنقه(اضافه بر مطالب کتاب درسی)

نکته ۱) اگر در هر ذوزنقه خطی موازی ۲ قاعده رسم شود داریم: (اثبات به عنوان تمرین)



$$\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

نکته ۲) اگر در ذوزنقه از وسط‌های دو ساق، خطی موازی دو ساق رسم شود داریم:

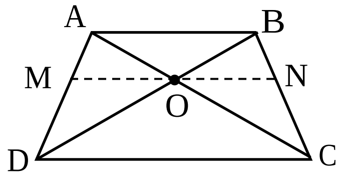


$$MN = \frac{۱}{۲}(AB + DC) \quad (۱)$$

$$PQ = \frac{۱}{۲}(DC - AB)$$

(خطی که وسط‌ها را به هم وصل می‌کند، لزوماً موازی قاعده‌هاست) (اثبات به عنوان تمرین)

نکته ۳: اگر در هر ذوزنقه از محل برخورد قطرها خطی موازی دو قاعده رسم شود تا ساق‌های ذوزنقه را در نقاط M و N قطع کند، دو رابطه زیر نتیجه می‌شود:



۱) $OM = ON$

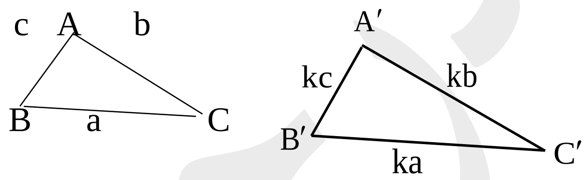
۲) $\frac{۲}{MN} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}$

تشابه دو مثلث

تعریف: دو مثلث متشابهند هرگاه دارای ۳ زاویه برابر و سه ضلع متناسب باشند. یعنی اضلاع یکی K برابر دیگری باشد که به K نسبت تشابه گوییم. $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$

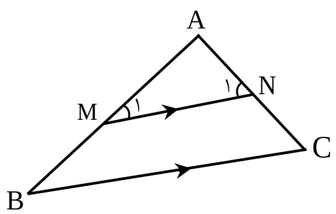
$$\hat{A} = \hat{A}' \ , \ \hat{B} = \hat{B}' \ , \ \hat{C}' = \hat{C}'$$

نسبت تشابه $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = K$



قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم کنیم که دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلث کوچک تشکیل شده با مثلث بزرگ متشابه است.

اثبات:

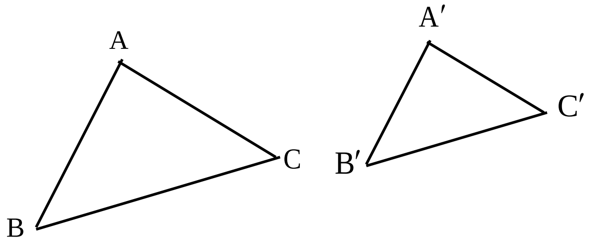


$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \begin{cases} \text{مورب } AB \longrightarrow M_۱ = B \\ \text{مورب } AC \longrightarrow N_۱ = C \end{cases} \\ A \text{ مشترک} \\ \text{و طبق تالس } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

حالات تشابه

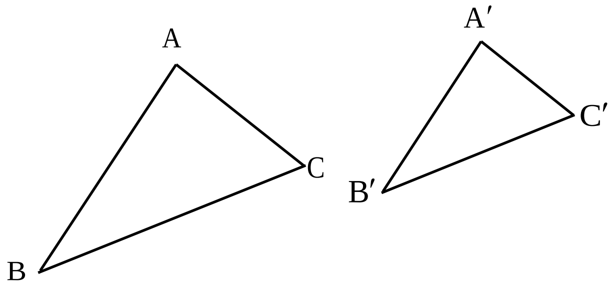
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



قضیه۲: هرگاه دو ضلع یک مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین اضلاع متناسب برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

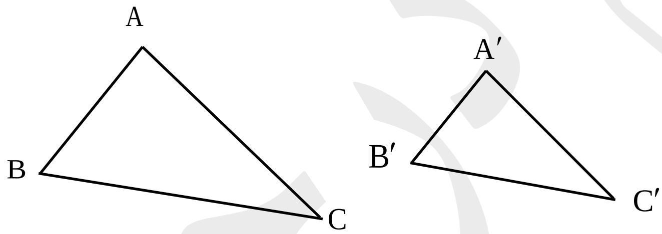
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} = \widehat{A'} \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



قضیه ۳: هرگاه سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

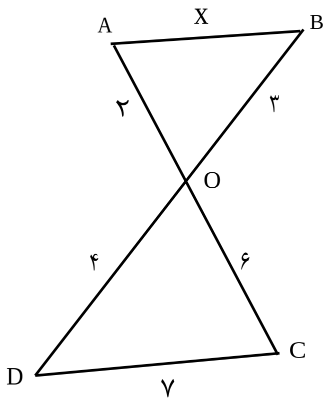
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

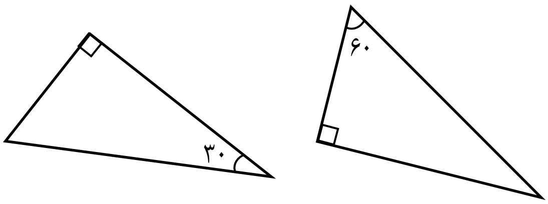


اثبات این ۳ قضیه با کمک قضیه اساسی تشابه مثلثها انجام می شود که علاقمندان می توانند با مراجعه به سایت mathplus-mds.ir اثبات آن را ببینند. ☺

مثال ۱: در شکل زیر، پس از اثبات تشابه مثلث‌ها، x را بیابید.

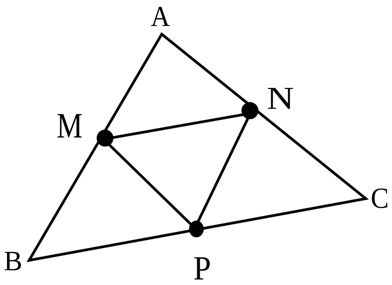


مثال ۲: آیا دو مثلث زیر متشابه‌اند؟



مثال ۳: اگر M و N و P وسط اضلاع AB و AC و BC باشند، ثابت کنید مثلث داخلی با مثلث اولیه متشابه است.

(اثبات باتوجه به کاردر کلاس کتاب درسی)

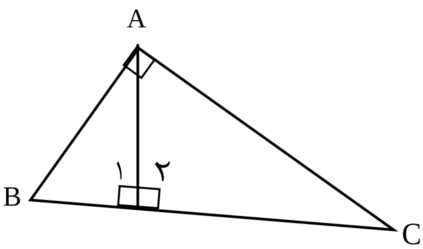


نکته : اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A"B"C"}$ آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A"B"C"}$$

* روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌کند که با مثلث اولیه متشابه هستند.



فرض: $\hat{A} = ۹۰$ و AH ارتفاع

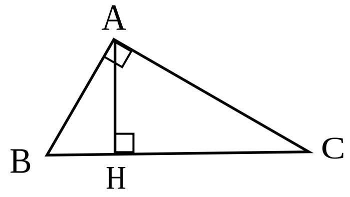
حکم: $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

اثبات:

نتایج و نکات تستی:

AC واسطه هندسی بین HC و BC

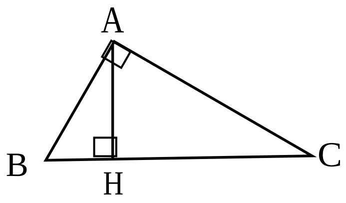
و AB واسطه هندسی بین HB و BC



$$\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC}$$
$$\Rightarrow AC^{۲}=HC\times BC$$

(۱)

و

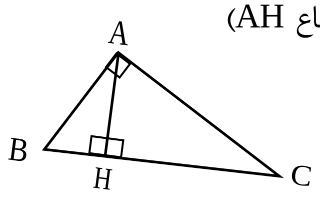


$$\frac{AB}{BC}=\frac{HB}{AB}$$
$$\Rightarrow AB^{۲}=HB\times BC$$

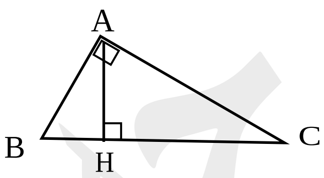
(۲)

۳- $AH^{۲}=BH\times HC$ (AH واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده توسط ارتفاع AH)

$\frac{AH}{CH}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow AH^{۲}=BH\times HC$ تناسب در $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$



۴- مساحت مثلث ABC را به دو طریق می‌نویسیم:



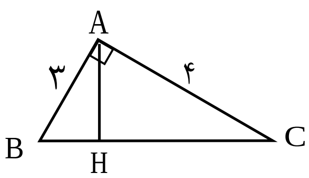
$$\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times AC$$
$$\Rightarrow AH\times BC=AB\times AC$$

۵- با جمع نتایج (۱) و (۲) قضیه فیثاغورث به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}AB^{۲}=BC\times HB\\ AC^{۲}=BC\times HC\end{array}\right\}\xrightarrow{+}AB^{۲}+AC^{۲}=BC(\overbrace{BH+CH}^{BC})$$

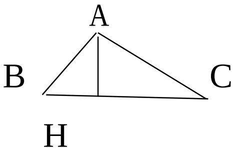
۶- با تقسیم نتایج (۱) و (۲) داریم: $\frac{AB^{۲}}{AC^{۲}}=\frac{HB}{HC}$

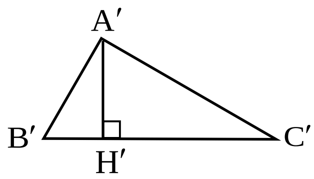
مثال: اگر در مثلث ABC، طول ضلع AB برابر ۳ و AC برابر ۴ باشد، طول قطعه کوچکتری که ارتفاع بر وتر ایجاد می‌کند بیابید.



نسبت محیط‌ها و مساحت‌ها در دو مثلث متشابه

قضیه: اگر دو مثلث متشابه با نسبت k باشند، نسبت ارتفاع‌ها نیز برابر نسبت تشابه k است.





فرض :

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{B} = \widehat{B'} \\ \hat{H} = \widehat{H'} = ۹۰\end{matrix}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{A'B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

نـکـتـه : نسبت نیمسازها و میانه‌ها نیز در دو مثلث متشابه، با نسبت تشابه k، برابر همان k است. (به عنوان تمرین اثبات کنید)

❋ نسبت محیط‌ها:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = k$$

اثبات: طبق آنچه در ویژگی‌های تناسب آموختیم.

*** نسبت مساحت‌ها:**

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times BC}{\frac{۱}{۲} A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'}$$

$$= \quad k \quad \times \quad k \; = \; k^{۲}$$

نتیجه: پس نسبت محیط‌ها در دو مثلث متشابه برابر k و نسبت مساحت‌ها برابر $k^{۲}$ است.

مثال : در دو مثلث متشابه که طول بزرگترین ضلع ان ها ۵ و۷ است. نسبت مساحت مثلث بزرگ به کوچک برابر .... برابر است.

فصل سوم – تابع

یادآوری:

تابع: یک رابطه که در آن به هر عضو دامنه، تنها یک عضو از برد نسبت داده می شود.

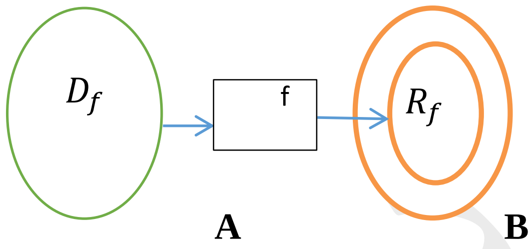
f: A→B

دامنه تابع : مجموعه مقادیری که تابع به ازای آن ها تعریف شده باشد .

$$D_f = \left\{x \in A \middle| (x,y) \in f\right\}$$

برد تابع: $R_f = \left\{y \in B \middle| \left(x,y\right) \in f\right\} =$

ماشین تابع:

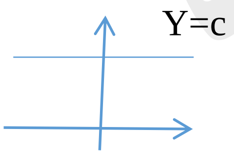


ضابطه تابع : قانونی که توسط آن به ازای مقادیر دامنه، مقادیر برد به دست می آید.

انواع تابع :

۱.تابع خطی : که ضابطه آن به صورت f(x)=ax+b است.

یک نوع از این تابع تابع ثابت است با ضابطه ی f(x)=c



۲.تابع قدر مطلق : تابعی با ضابطه ی $f(x)=|x|$، که به ازای هر مقدار مثبت خودش و به ازای مقدار منفی، قرینه آن را به عنوان خروجی می دهد.

مثال: تابع $y=|x-۲|+۱$ را رسم کنید.

۳–تابع درجه دو(سهمی):

$$f(x) = ax^{۲} + bx + c$$

مثال: تابع $y=x^{۲}-۲$ را رسم کنید.

نکته: تابع درجه۲ به صورت $y=a(x-h)^{۲}+k$ و یا $y=ax^{۲}+bx+c$ مطرح می شود و با تشخیص راس سهمی s و جهت سهمی و نقاط کمکی قابل رسم است .

تابع گویا:

تعریف: تابع کسری به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که qو p چند جمله ای هستند و $q(x) \neq ۰$

مثال: کدام تابع گویا است ؟

$f(x)=\frac{۲x^{۲}+۱}{\sqrt{۳}x}$

$f(x)=\frac{x^{۲}-x\sqrt{x}}{۵x}$

O **دامنه تابع گویا:** همه اعداد حقیقی به جز آن هایی که مخرج را صفر می کنند.

نکته: دامنه تابع گویا را قبل از ساده کردن کسر مشخص می کنند

$D_{\frac{p}{q}}=\{x|q(x) \neq ۰\}$

مثال ۳: دامنه تابع $f(x)=\frac{x+\frac{۱}{x}}{۲-\frac{۱}{x+۱}}$ را تعیین کنید.

O**برد تابع گویا:** خروجی تابع گویا به ازای ورودیهایی که می توانند وارد ماشین تابع گویا شوند.

مقادیری که در مجموعه ی برد مشخص می شوند با توجه به ضابطه است و البته همواره به آسانی مشخص نمی شوند وگاهی نیاز به رسم شکل تابع است .

مثال: دامنه و برد تابع $f(x)=\frac{۲x}{x+۱}$ را بیابید.

تمرین ۱❊: دامنه و برد $f(x)=\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۲x}{x(x^{۲}-۱)(x+۲)}$ را تعیین کنید.

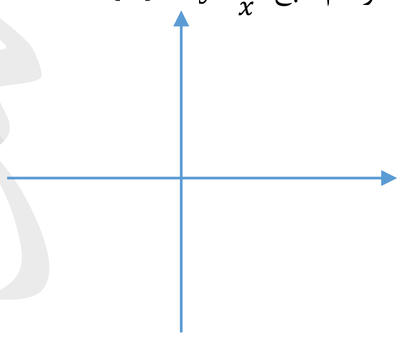
نکته : اعدادی که در دامنه از اعداد حقیقی حذف شده اند نمیتوانند مقداری در برد به ما بدهند.

تمرین ۲*: دامنه و نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳+۸}{x+۲}$ را تعیین کنید و سپس برد تابع را مشخص کنید

رسم تابع گویا

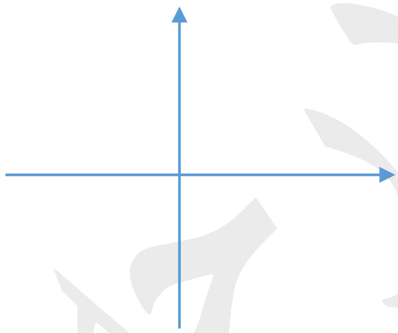
رسم تابع $y=\frac{۱}{x}$ $D=R-\{0\}$

x	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$
y	۱	$\frac{۱}{۲}$	۲	۳	-۱	-۲	-۳



رسم تابع $y=-\frac{۱}{x}$ $D=R-\{0\}$

قرینه تابع بالا نسبت به محور yها



$(x\to\infty$ آنگاه $y \to ۰)$

$(y\to\infty$ آنگاه $x \to ۰)$

***نکته تستی برای علاقمندان (اضافه بر مطلب کتاب درسی)

رسم تابع به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$:

$R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$,$D=R-\{-\frac{d}{c}\}$

مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ مجانب قائم $X=-\frac{d}{c}$

محورها به مکان این دو مجانب منتقل می شوند و تابع گویا از کنار مجانب ها به یکی از دو فرم $y=\frac{۱}{x}$ یا $y=-\frac{۱}{x}$ رسم می شود.

اگر ad-bc>0 ← مشابه $y=-\frac{۱}{x}$

اگر ad-bc<0 ←مشابه $y=\frac{۱}{x}$

مثال : $y=\frac{۲x-۱}{x-۳}$ را رسم کنید .

قائم x=3   افقی y=2

ad-bc=-6-(-1)<0

→ مشابه $y=\frac{۱}{x}$

توابع رادیکالی

تعریف: توابعی که در ضابطه آنها رادیکال باشد،

ما با توابع رادیکالی با فرجه۲ سروکار داریم .

$f(x)= \sqrt{p(x)}$

دامنه تابع : $D_f = \{x|p(x) \geq ۰\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید .

الف) $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$

$۲x-۳ \geq ۰ \qquad x \geq \frac{۳}{۲}$

$Df=\left\{x \middle| x \geq \frac{۳}{۲}\right\}=[\frac{۳}{۲}$ و $+\infty)$

ب) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۳}}-\sqrt{x}$

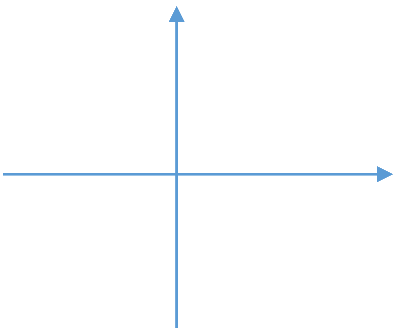
ج) $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}}{۱-\sqrt{x-۱}}$ $\qquad$ $x^{۲}-۳x+۲\geq ۰$

$x-۱\geq ۰$ $\qquad$ $x\geq ۱$ $\qquad$ $۱-\sqrt{x-۱}\neq ۰$

رسم تابع رادیکالی

رسم $f(x)=\sqrt{x}$

X	۰	۱	۴	...
y	۰	۱	۲	...

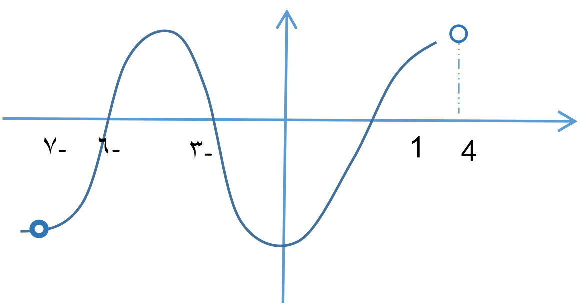


مثال ۱: تابع $y=۱+\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید.

مثال ۲: تابع $y=\sqrt{۳-x}$ را رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید .

تمرین۱) تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ را رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید

تمرین ۲٭)باتوجه به نمودار تابع f دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ را مشخص کنید. (نکته تستی)



توابع مساوی:

تابع f وg مساوی هستند هرگاه $\begin{cases} D_f = D_g \\ \forall x \in D \quad f(x) = g(x) \end{cases}$

مثال۱: آیا دو تابع $g(x)=\frac{X^۲}{X}$ و f(x)=x مساوی هستند؟

خیر زیرا $D_f = R$ و $D_g = R - \{۰\}$

مثال: آیا دو تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x^۲+۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ برابرند؟

مثال : آیا دو تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x+۲}{x}}$ برابرند؟

توابع پله ای و تابع جزء صحیح

تعریف تابع پله ای : زمانی که بتوانیم دامنه را بصورت بازه های جدا بنویسیم و تابع به ازای xهای متعلق به هر بازه فقط یک مقدار بدهد. همانند مثال پارکینگ در کتاب درسی

تابع جزء صحیح : تابع به هر عدد صحیح خود آن عدد و به هر عدد غیر صحیح بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن را نسبت می دهد.

f(x)=[x]

به طور مثال: f(۲)=[۲]=۲   f(۱/۲)=[۱/۲]=۱ f(-۰/۳)=[-۰/۳]=-۱

مثال :

$$\left[\frac{۱۰}{۲}\right] + \left[\frac{۱۰}{۲^۲}\right] + \left[\frac{۱۰}{۲^۳}\right] + \cdots .. + \left[\frac{۱۰}{۲^n}\right] =$$

۵+۲+۱+۰+۰   ۰+۰=۸

تمرین ❋:

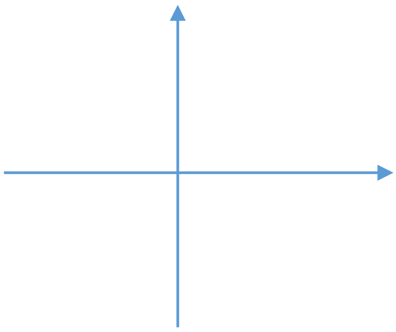
$[\sin 0]+[\sin 1]+\dots+[\sin 170]=$

رسم تابع جزء صحیح در یک بازه

به طور مثال تابع $f(X)=[X]$ را در بازه $[-۲،۲]$ رسم کنید.

$-۲\le x < -۱ \quad y=-۲$

$-۱\le x < ۰ \quad y=-۱$



ویژگی های مهم تابع جزء صحیح :

$1)[x+k]=[x]+k \quad k\in z$

$۲)۰\le x-[x] < ۱$

$۳)[x] < x < [x]+۱$

$۴)[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in z \\ -۱ & x\notin z \end{cases}$

$۵)[x+y]=\begin{cases} [x]+[y] \\ [x]+[y]+۱ \end{cases}$

$\rightarrow \quad [x+y]\ge [x]+[y]$

مثال : تابع $f(x)=\frac{[x]+x[x]}{[x]+[-x]}$ را درنظر بگیرید مطلوبست

الف)دامنه تابع

ب)مجموعه نقاط صفر

تمرین ❋❋: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۶+[x]-۲[x]^۲}$ را بیابید.

معادله شامل جزء صحیح

با توجه به اینکه جزء صحیح همواره عددی صحیح است به حل معادله می پردازیم:

مثال: $۲[x+1]= ۴$

وارون تابع

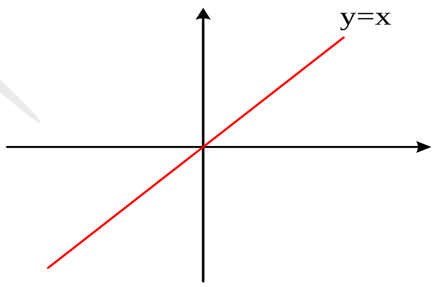
اگر در یک تابع جای مؤلفه x و y را عوض کنیم، وارون تابع به دست می‌آید:

مثال: $f(x) = \{(۱ \text{ و } ۲) \text{ و } (۲ \text{ و } ۰) \text{ و } (۰ \text{ و } -۱) \text{ و } (۳ \text{ و } ۰)\}$

وارون تابع : $\{(۲ \text{ و } ۱) \text{ و } (۰ \text{ و } ۲) \text{ و } (-۱ \text{ و } ۰) \text{ و } (۰ \text{ و } ۳)\}$

آیا وارون این تابع خود یک تابع است؟ چرا؟

نقاط هردو مجموعه با دو رنگ را در دستگاه زیر نشان دهید.



با دقت در شکل می بینیم که این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (y=x) قرینه اند.

تابع یک به یک

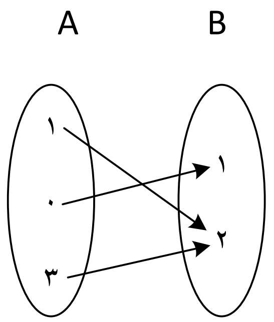
اگر مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب یک تابع، تکراری نباشند، تابع یک به یک است. ۱-۱

یعنی به ازای هر x یک y

و به ازای هر y یک x

مثال۱) رابطه‌ی هر فرد با گروه خونی‌اش یک به یک نیست.

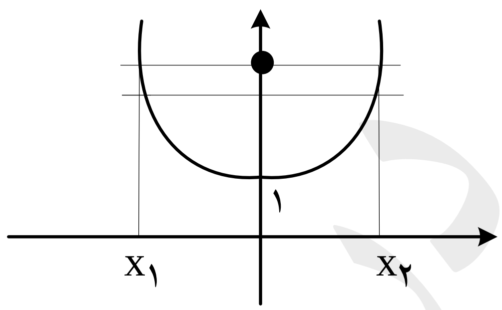
مثال۲) آیا $f = \{$(۲و ۱) و (۱و ۰)و (۲و ۳)$\}$ یک به یک است؟



تشخیص تابع یک به یک از روی:

- زوج مرتب: مؤلفه های دوم هم مثل هم نباشند. و اگر مثل هم بودند، مؤلفه های اول هم مثل هم باشند.
- نمودار ون: به مجموعه B دو پیکان به یک عضو وارد نشود.
- نمودار تابع در دستگاه مختصات: خطوط موازی محور x حداکثر در یک نقطه تابع را قطع کنند.
- و از روی ضابطه تابع: اگر $y_1=y_2$ پس باید $x_1= x_2$.

مثال ۲: آیا تابع $f(x) = x^2 + 1$ یک به یک است؟



x_1 و x_2 دارای یک عرض

اثبات: $y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = \pm x_2$

نکته: اگر بخواهیم یک به یک بودن را رد کنیم، با مثال نقض نیز می‌توان گفت:

$f \ni$ (۲ و ۱) و (۲و ۱−)

مثال ۳: تابع $f = \{$(۲و ۱) و (۲و ۵ − ۳a) و (۴و ۳)$\}$ به ازای چه مقدار a یک به یک است؟

تمرین۱: آیا تابع $f(x) = x^4 - x$ یک به یک است؟

تمرین ۲*: یک به یک بودن تابع $f(x) = x + |x|$ را بررسی کنید و وارون تابع را رسم کنید.

تابع وارون: هرگاه وارون تابعی خود یک تابع باشد، به آن تابع وارون گوییم.

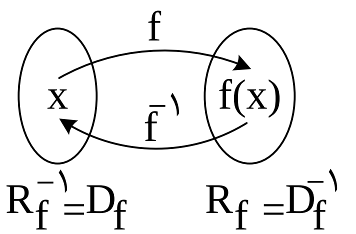
– اگر تابعی یک به یک باشد، وارونش یک تابع است.

– هر تابع وارون دارد ولی هر وارونی الزاماً تابع نیست.

مثال: آیا وارون تابع $f = \{(۱و۱) و (۲و۰) و (۱- و۰)\}$ خود یک تابع است؟

دامنه و برد تابع وارون

پس همواره داریم:



مثال: برد تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x-۵}{۳x+۱}$ را بیابید.

$$R_{f^{-1}} = D_f = R - \left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$$

ضابطه تابع وارون

برای داشتن ضابطه تابع وارون همانند یافتن برد تابع، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس برای داشتن ضابطه‌ای زیباتر، نام x و y را عوض می‌کنیم.

مثال: ابتدا نشان دهید $f(x) = \frac{۲x-۳}{x+۱}$ وارون پذیر است و ضابطه تابع وارون را بنویسید.

چند نکته اضافه:

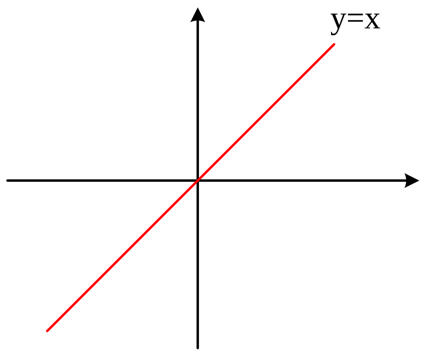
نکته ۱: وارون یک تابع چند ضابطه‌ای زمانی تابع است که ضابطه‌های آن یک به یک و برد تک‌تک آنها اشتراک نداشته باشد.

نکته ۲: همه تابع های خطی به جز تابع ثابت، یک به یک هستند.

تمرین ۱☼: آیا وارون تابع زیر ، یک تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\le ۰ \\ x^{۲}-۵ & ۰<x\le ۲ \\ -x-۲ & x>۲ \end{cases}$$

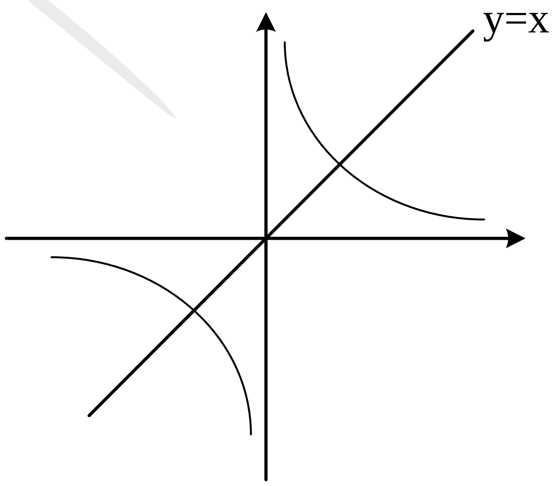
تمرین ۲☼: ضابطه و شکل تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ x+۳ & x\ge ۰ \end{cases}$ را مشخص کنید.



نکته۳: گاهی ضابطه تابع وارون با خود تابع یکسان می‌شود و این زمانی اتفاقی می افتد که تابع خودش نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد.

مثال:

$$y=\frac{۱}{x}$$
$$x=\frac{۱}{y}\Longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x}$$



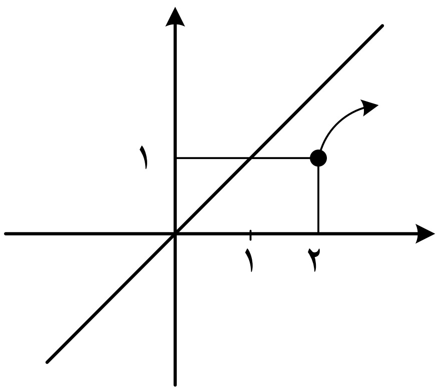
نکته تستی: و ضابطه ی بعضی از توابع که این خاصیت را دارند، به صورت زیر است:

$f(x)=\sqrt[n]{۱-x^{n}}$ (فرد n)

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$$

تمرین۳*: با اثبات شرط یک به یک بودن، تابع وارون تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ را بیابید و هر دو تابع را رسم کنید.

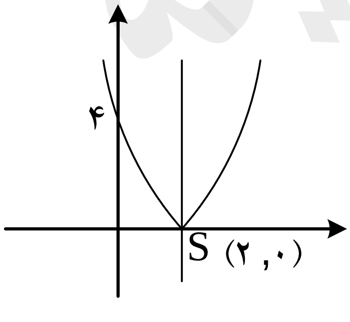
با توجه به شکل f یک به یک است، پس تابع وارون دارد.



تمرین٤*: نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax + b$ در نقطه‌ی $(-1 \text{ و } \frac{1}{3})$ نمودار تابع وارون خود را قطع می‌کند، a و b را بیابید.

محدود کردن دامنه برای ساختن تابع یک به یک

مثال: در سهمی $y = (x-2)^2$ تابع در چه بازه‌هایی ۱-۱ است؟



پس سهمی‌ها در $[-\frac{b}{2a} \text{ و } +\infty)$ و $(-\infty \text{ و } -\frac{b}{2a}]$ یک به یک هستند و تابع وارون دارند.

اعمال جبری روی توابع

۱) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $\qquad D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$

۲) $(f \cdot g)(x) = f(x).g(x)$ $\qquad D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$

۳) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = ۰\}$

۴) $(kf)(x) = kf(x)$ $\qquad D_{kf} = D_f$

مثال با زوج مرتب: اگر توابع f و g به صورت زیر باشند:

$f = \left\{\left(۱ - و۳\right) و \left(۲و۵\right) و \left(۲و۱\right) و \left(۵و۲\right)\right\}$ و $g= \left\{\left(۲و۳\right) و \left(۱ - و۴\right) و \left(۱و۰\right)\right\}$ ، توابع

$\frac{f}{g}$ و $۳f - g$ و $f \cdot g$ و $f + g$ را همراه با دامنه مشخص کنید.

$D_f \cap D_g = \{۱ و ۳\}$

$f + g = \left\{\left(۱و...\right) و \left(۳و....\right)\right\}$

$f \cdot g = \left\{\left(۱و...\right) و \left(۳و...\right)\right\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{...\}$ $\quad \frac{f}{g} = \left\{\left(... و ...\right)\right\}$

$۳f - g = \left\{\left(... و ...\right) و \left(... و ...\right)\right\}$

مثال: اگر $f(x) = x - ۲$ و $g(x) = ۲x + ۱$ باشند، دامنه و ضابطه تابع $۲f - g$ و تابع $\frac{۲f}{f-۳g}$ را مشخص کنید.

تمرین ۱*: اگر $f(x) = \frac{۱}{x^۲+۲}$ و $g(x) = \sqrt{۲x + ۱۰}$ ، دامنه تابع $\frac{f}{g-۲}$ را بنویسید.

تمرین۲*: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۵-x}}{x+۱}$ و $g(x)=\Big\{\big(۱\text{و}۵\big)\text{ و }\big(۱-\text{ و}۰\big)\text{ و }\big(-۱\text{و}۳\big)\Big\}$ تابع $\frac{۲f}{g^{-۱}}$ را مشخص کنید.

نکات اضافه:

مجموع دو تابع خطی همواره خطی است:

$$f(x)=ax+b \qquad g(x)=a'x+b'$$

$(f\pm g)(x)=(a\pm a')x+b\pm b'$ خطی

اگر f و g خطی باشند، حاصلضرب f و g سهمی یا خط است. $\frac{f}{g}$ خط یا تابع هموگرافیک است.

مثال: $f(x)=x+۱ \qquad g(x)=۲\,x$

$(f\cdot g)(x)=۲\,x^{۲}+۲\,x$ سهمی $\quad \frac{f}{g}(x)=\frac{x+۱}{۲\,x}$ هموگرافیک

یادآوری رسم با انتقال:

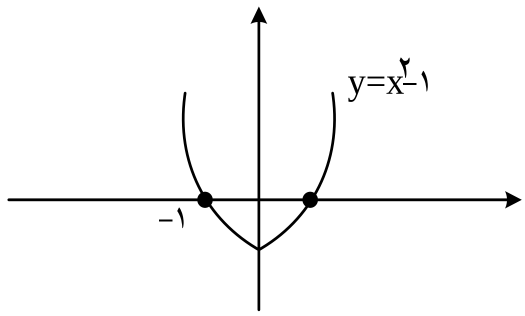
اگر $f(x)$ با k جمع یا تفریق شود، روی محور y به اندازه ی k حرکت می‌کنیم. اگر در عددی مثل k ضرب شود، به ازای هر x ثابت، مقدار y در عدد k ضرب می‌شود.

اگر x با k جمع شود، به اندازه قرینه ی k روی محور x حرکت می‌کنیم. اگر عددی مثل k در x ضرب شود مقادیرx در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شود.

برای رسم $|f|$ ابتدا f رسم می‌شود، سپس قسمت های شکل با y منفی، حذف و قرینه ی آن نسبت به محور x کشیده می‌شود.

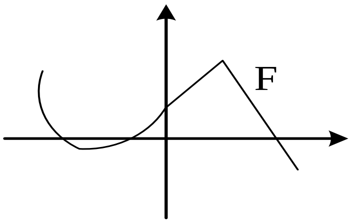
مثال: تابع قدرمطلقی زیر را رسم کنید.

$$y=|x^{۲}-۱|$$

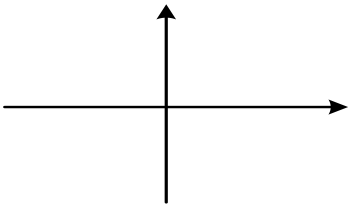


برای رسم $f(|x|)$ ابتدا f رسم می‌شود، سپس شکل در قسمت xهای منحنی حذف و قرینه قسمت مثبت نسبت به محور y ها رسم می‌شود.

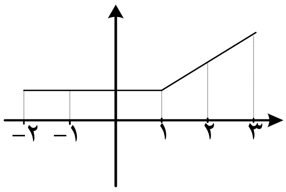
مثال:



$\xrightarrow{f(|x|)}$



تمرین ۱: اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، $f(-x)+۱$ را رسم کنید و دامنه را مشخص کنید.

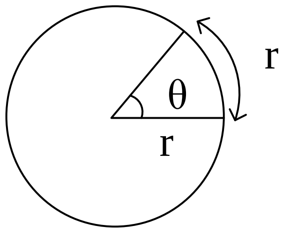


تمرین ۲: $y=\sqrt{۱-x}$ را با انتقال رسم کنید.

فصل چهارم– مثلثات

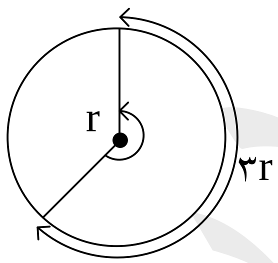
۱ **درجه**: اگر یک دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبروی هر کمان یک درجه است.

۱ **رادیان**: برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبروی این زاویه برابر شعاع دایره باشد.



$$\theta = ۱\ Rad$$

که یک رادیان تقریباً برابر ۵۷ درجه است.



$$\Longrightarrow \qquad \theta = ۳\ RAD = \frac{۳\ \mathrm{r}}{\mathrm{r}}$$

نتیجه:

$$\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبروی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r}$$

و همچنین در یک دور کامل :

$$\frac{\text{محیط دایره}}{r} = ۲\pi \qquad \text{که}$$

$$\pi \sim ۳/۱۴$$

پس داریم:

	R		D
$\frac{\text{محیط دایره}}{r} =$	۲π	$\sim$	۳۶۰
	π	$\sim$	۱۸۰
	$\frac{\pi}{۲}$	$\sim$	۹۰
	$\frac{\pi}{٤}$	$\sim$	۴۵
	$\frac{\pi}{۳}$	$\sim$	۶۰

فرمول تبدیل درجه به رادیان:

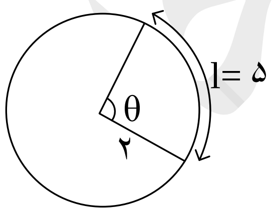
$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{\pi D}{۱۸۰}$$

مثال۱: ۲۵ درجه، چند رادیان است؟

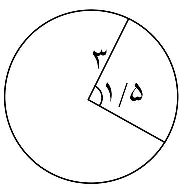
$$R = \frac{\pi \times ۲۵}{۱۸۰} = \frac{۵\,\pi}{۳٦}$$

مثال۲: $\frac{\pi}{۵}$ رادیان چند درجه است؟

مثال ۳: اندازه زاویه θ چند درجه است؟



مثال ۴: در دایره ای به شعاع ۳، اندازه کمان روبرو به زاویهٔ ۱/۵ رادیان را بیابید.

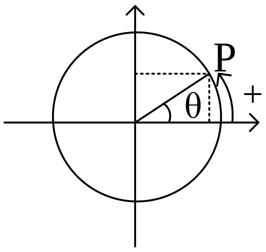


مثال ۵: زاویه بین هر دو عدد متوالی روی ساعت چند رادیان است؟

تمرین*: زاویه بین دو عقربه در ساعت ۱۰:۱۰ را بر حسب رادیان حساب کنید.

مروری مثلثات سال دهم:

نکته ۱: جهت مثبت: خلاف حرکت عقربه ها



نکته:۲: مختصات نقطه p، سینوس و کسینوس زاویه را نشان می دهد.

$$p\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

تمرین: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sin ۳۰ \cos ۴۵ \; - tan^{۲}۶۰}{\sin ۹۰ \; + \tan ۴۵ \cos ۶۰}$$

فرمول های پر کاربرد:

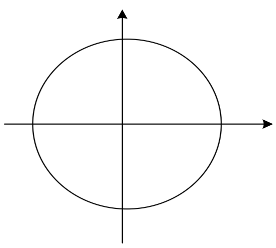
$$۱) \; sin^{۲} x + cos^{۲}x = ۱ \quad \Rightarrow \begin{cases} sin^{۲}x = ۱ - cos^{۲}x \\ cos^{۲}x = ۱ - sin^{۲}x \end{cases}$$

$$۲) \; \tan x = \frac{۱}{\cot x} \longrightarrow \tan x \cot x = ۱$$

$$۳) \; ۱ + tan^{۲}x = \frac{۱}{cos^{۲}x}$$

$$۴) \; ۱ + cot^{۲}x = \frac{۱}{sin^{۲}x}$$

تمرین: انتهای کمان $\frac{۵\pi}{۳}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارند؟ علامت سینوس و کسینوس این دو زاویه را تعیین کنید.

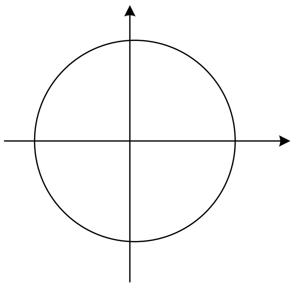


نسبتهای مثلثاتی $-\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\pi} \pm \boldsymbol{\alpha}$ و $\frac{\pi}{۲} \pm \boldsymbol{\alpha}$ و $۲\,k\pi \pm \boldsymbol{\alpha}$ بر حسب $\boldsymbol{\alpha}$

برای تشخیص بهتر، زاویه $\boldsymbol{\alpha}$ را حاده در نظر می گیریم.

۱- قرینه یک زاویه

$(-\alpha)$



$$\sin(-\alpha) = -sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مثال:

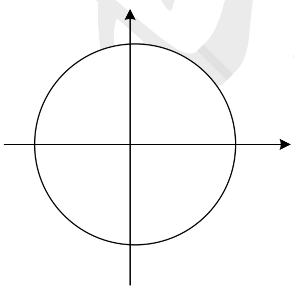
$$\sin(-۳۰) = -\sin ۳۰ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{٦}\right) = \cos\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{٤}\right) = -\tan\frac{\pi}{٤} = -۱$$

۲-زاویه های مکمل:

$(\pi - \alpha)$



$$\sin(\pi - \alpha) =$$
$$\cos(\pi - \alpha) =$$
$$\tan(\pi - \alpha) =$$
$$\cot(\pi - \alpha) =$$

مثال:

$$\cos(۱۲۰) = \cos(۱۸۰ - ٦۰) = -\cos ٦۰ = -\frac{۱}{۲}$$

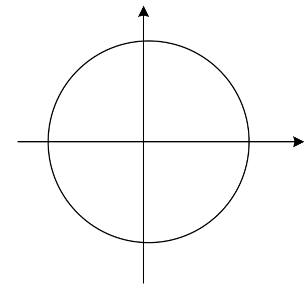
$$\tan(-۱۵۰) =$$

$$\sin\left(-\frac{۳\pi}{٤}\right) =$$

اگر عدد بالای کسر یکی کمتر از مخرج باشد مثل $\frac{۳\pi}{۴}$، به صورت $\frac{\pi - \frac{\pi}{۴}}{\pi - \alpha}$ است.

۲-زاویه های α+۱۸۰

$(\pi + \alpha)$



$$\sin(\pi + \alpha) =$$
$$\cos(\pi + \alpha) =$$
$$\tan(\pi + \alpha) =$$
$$\cot(\pi + \alpha) =$$

مثال:

$$\sin(۲۱۰) = \sin(۱۸۰ + ۳۰) = -\sin ۳۰ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\left(-\frac{۷\pi}{۶}\right) =$$

$$\tan ۲۲۵ =$$

اگر عدد بالای کسر یکی بیشتر از مخرج باشد،مثل $\frac{۷\pi}{۶}$ به صورت $\frac{\pi + \frac{\pi}{۶}}{\pi + \alpha}$ است.

تمرین:

۱) حاصل عبارت $A = \frac{۲\sin(\pi+\alpha) - ۴\sin(\pi-\alpha)}{۳\cos(\pi+\alpha) - \cos(\pi-\alpha)}$ کدام است؟

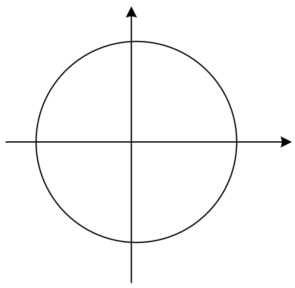
۱) $۳\tan\alpha$ ۲) $\frac{۳}{۲}\tan\alpha$ ۳) $-\tan\alpha$ ۴) $-۳\tan\alpha$

) حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\sin ۲۰۰ + \sin ۱۰ + \sin ۲۰ + \sin ۱۹۰ = ?$$

۳- زاویه های متمم

$$\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$

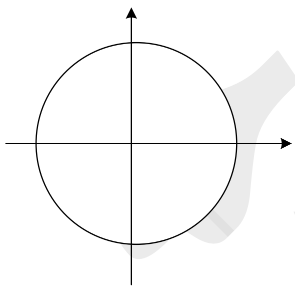
مثال:

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{٤}\right)=\sin\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال: اگر $\sin A=۰/۱$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)$ چه مقادیری می تواند داشته باشد؟

۴- زاویه های $\frac{\pi}{۲}+\alpha$

$$\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=$$

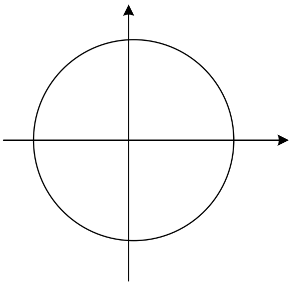
دقت کنیم که وارد ربع دوم می شویم و به جز sin ، بقیه منفی هستند.

⬅**مضرب های فرد $\frac{\pi}{۲}$جای نسبتهای مثلثاتی را عوض می کند.** $\frac{\pi}{۲}$ و$\frac{۳\pi}{۲}$ و$\frac{۵\pi}{۲}$ و ...

مثال:

$$\tan(۱۳۵)=\tan(۹۰+۴۵)=-\cot ۴۵=-۱$$

۵- زاویه های $۲\,k\pi \pm \alpha$



مضرب زوج π که حرکت کنیم مثل ۲π و ۴π و ۶π و ... بر می گردیم سرجا اولمون. انگار هیچ حرکتی نکردیم. پس می توان $۲\,k\pi$ را پاک کرد.

$$\sin(۲\,k\pi + \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(۲\,k\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(۲\,k\pi + \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(۲\,k\pi - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(۲\,k\pi + \alpha) = \tan\pi \qquad \tan(۲\,k\pi - \alpha) = -\tan\pi$$
$$\cot(۲\,k\pi + \alpha) = \cot\alpha \qquad \cot(۲\,k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

مثل $(-\alpha)$ برخورد می کنیم.

اگر مضرب فرد π حرکت کنیم مثل π ۳π و ۵ و ... روی نقطهٔ π قرار می گیریم.

مثال:

$$\sin(٤٠٥) = \sin(٣٦٠ + ٤٥) = \sin ٤٥ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\cos\left(\frac{٧\pi}{٣}\right) = \cos\left(\frac{٦\pi + \pi}{٣}\right) = \cos\left(٢\pi + \frac{\pi}{٣}\right) = \cos\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$$

$$\tan\left(\frac{٥\pi}{٣}\right) =$$

مثال: اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد، $\sin\left(\frac{۵\pi}{۲} + \theta\right) = ؟$

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.. $\left(\sin\alpha = \frac{۱}{۳}\right)$

$$\cos(۴\,\pi - \alpha) + ۳\sin(۳\,\pi + \alpha) + \cos(۵\,\pi + \alpha)$$

تمرین۱: یک مقدار برای x پیدا کنید که $\sin\left(۲\pi + \frac{\pi}{۵}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{۱۰}\right)$

تمرین۲*: اگر $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)+\sin(۳\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{۳\boldsymbol{\pi}}{۲}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)}$$

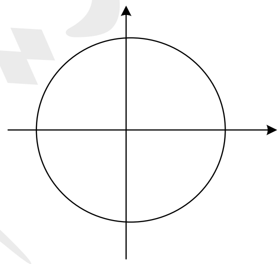
رسم توابع مثلثاتی

تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ نمونه هایی از توابع مثلثاتی هستند که به رسم این توابع و ویژگی های آنها می پردازیم.

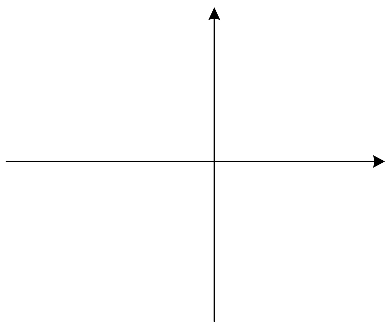
رسم تابع $y=\sin x$

ورودی تابع x یک زاویه بر حسب رادیان، و خروجی تابع سینوس آن است که عددی بین ۱- و ۱ است.

پس: $R_f=\left[-۱ \text{ و } ۱\right]$ $\qquad D_f=R$



x	y
۰	
$\frac{\pi}{۲}$	
π	
$\frac{۳\pi}{۲}$	
۲π	



(از نقاطی مثل $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ و ... به عنوان نقاط کمکی استفاده می کنیم.)

تابع $y=\sin x$ در فواصل $T=۲\pi$ تکرار می شود پس دوره تناوب تابع ۲π است. در فواصل $\left[۲k\pi \text{ و } (۲k+۲)\pi\right]$ نمودار تابع یکسان است.

$\left[۰ \text{ و } ۲\pi\right]$ و $\left[۲\pi \text{ و } ۴\pi\right]$ و $\left[۴\pi \text{ و } ۶\pi\right]$ و ...

تابع $y = \sin\alpha$ در $x = k\pi$ برابر صفر است.

۰ و π و 2π و 3π و ...

تابع $y = \sin x$ در $x = 2\,k\,\pi + \frac{\pi}{2}$ حداکثر مقدار خود یعنی یک را دارد.

تابع $y = \sin x$ در $\begin{matrix} x = 2\,k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \left(x = 2\,k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}$ کمترین مقدار خود یعنی منفی یک را دارد.

رسم توابع سینوسی با انتقال:

توابع سینوسی هم همانند دیگر توابع با انتقال قابل رسم است.

مثال ۱) تابع $y = 2\sin x + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید. (در بازهٔ $[0, 2\pi]$)

مثال ۲) تابع $y = -\sin(x-\pi)$ را رسم کنید. (در بازهٔ $[0, 4\pi]$)

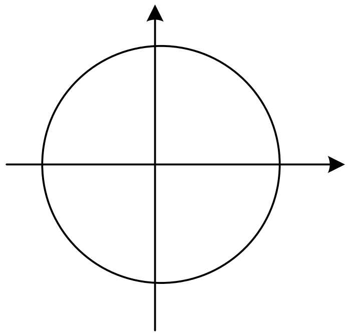
تمرین: تابع $y = |\sin x|$ را رسم کنید و دوره تناوب را با توجه به شکل تعیین کنید.

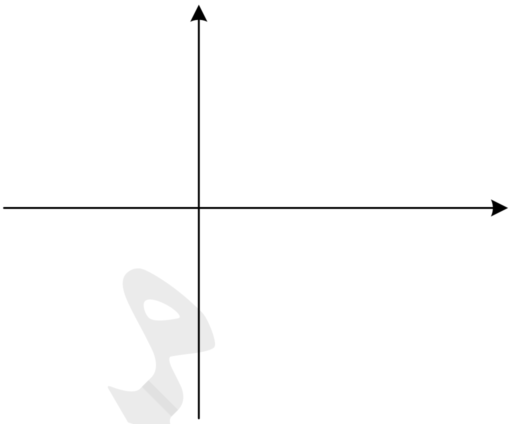
رسم تابع $\boldsymbol{y = \cos x}$

ورودی تابع x بر حسب رادیان و خروجی تابع کسینوس آن است که عددی بین ۱- و ۱ است. پس

$$f(x) = \cos x \qquad D_f = R \qquad R_f = \left[-۱ \text{ و } ۱\right]$$

x	$\cos x$
۰	
$\frac{\pi}{۲}$	
π	
$\frac{۳\pi}{۲}$	
۲π	





- تابع $y = \cos x$ نیز در فواصل ۲π تکرار می شود پس دوره تناوب آن $T = ۲\pi$ است.

- تابع $y = \cos x$ در نقاط $x = (۲\,k - ۱)\frac{\pi}{۲}$ صفر است.

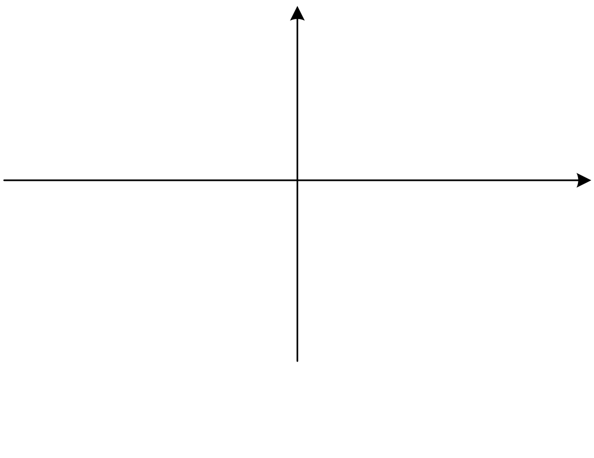
- تابع $y = \cos x$ در نقاط $x = ۲\,k\pi$ حداکثر مقدار خود یعنی ۱ را دارد.

- تابع $y = \cos x$ در نقاط $x = (۲\,k - ۱)\pi$ حداقل مقدار خود یعنی ۱- را دارد.

رسم توابع کسینوسی با انتقال نیز امکان پذیر است.

نکته: گاهی با ساده کردن یک تابع سینوسی یا کسینوسی راحت تر می توان آنرا رسم کرد.

مثال: تابع $y = -۲\cos(x - \pi)$ را رسم کنید. (در بازهٔ $\left[۰ \text{ و } ۲\pi\right]$).

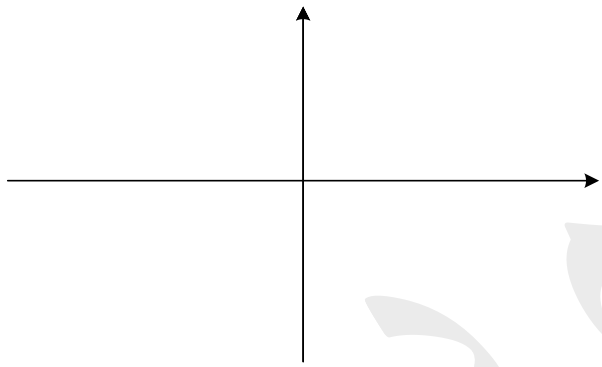


تمرین*: تابع $y = ۳\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$ را رسم کنید. نقاط صفر تابع را مشخص کنید. (در بازهٔ $[۰$و$۲\pi]$)

نکته (فشردگی افقی): (مربوط به ریاضی دوازدهم)

برای رسم توابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ دقت کنیم که دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ می شود که آنرا به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم و تابع را رسم می کنیم.

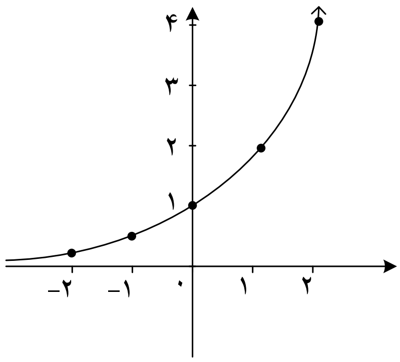
مثال: تابع $y = \sin ۲\,a$ را رسم کنید. (در بازهٔ $\left[۰\right.$و$\left.۲\pi\right]$)



فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی:

تعریف تابع نمایی: تابعی با ضابطه ی $f(x) = a^x$ که a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است و متغیر به صورت توان است.



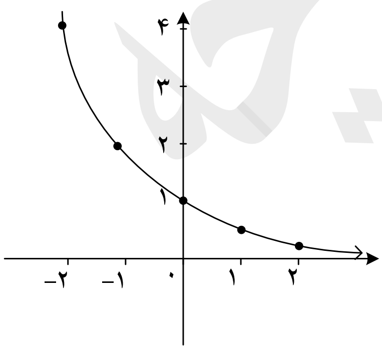
رسم تابع $y = ۲^x$ با دامنه R: (با نقطه گذاری)

۱) دامنه تابع R و برد $(۰ ,+\infty)$ است.

۲) از نقطه ۱ روی محور y ها می گذرد و محور x را قطع نمی کند.

۳) تابع صعودی اکید است$\left(x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)\right) \Leftarrow$ یک به یک است.

و همه توابع نمایی با پایه بزرگتر از یک، این ویژگیها را دارند



رسم تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ با دامنه ی R (با نقطه گذاری)

۱) دامنه تابع R و و برد آن $(۰ ,+\infty)$ است.

۲) از نقطه ۱ روی محور yمی گذرد و محور x را قطع نمی کند.

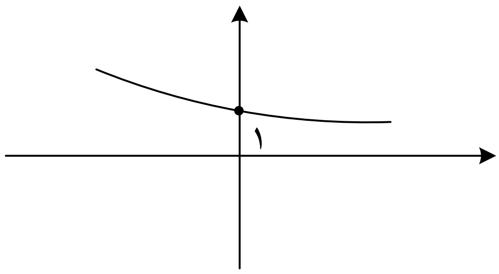
۳) تابع نزولی اکید است.$\left(x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)\right) \Leftarrow$ یک به یک است.

و همه توابع نمایی با پایه کوچکتر از یک این ویژگیها را دارند.

نکته: تابع $y = a^x$ و $y = (\frac{۱}{a})^x$ نسبت به محور y قرینه هستند.

نتیجه: تابع $y = a^x$ برای $a > ۱$ صعودی اکید و برای $۰ < a < ۱$ نزولی اکید است.

مثال: تابع $y = (\frac{۲a+۳}{۳})^x$ به صورت مقابل است، حدود a چیست؟



نکته: توابع $y = ka^x$ نیز صعودی یا نزولی اکید ودر نتیجه یک به یک هستند.

حل معادلهٔ نمایی:

معادله ای که مجهول به صورت توان باشد.

از خصوصیت یک به یک بودن تابع نمایی برای حل آن استفاده می کنیم.

$$a^{x_۱} = a^{x_۲} \quad \longleftrightarrow \quad x_۱ = x_۲$$

نکته: قواعد توان برای اعداد حقیقی نیز صدق می کند.

مثال ۱) معادلهٔ $۲^{x-۱} + ۲^{x+۱} = ۲۰$ را حل کنید.

مثال ۲) معادلهٔ $۸^{۲x-۱} \times ۲^{-۲x} = ۳۲^x$ را حل کنید.

تمرین*) معادلهٔ $۵^{۲x+۱} = ۲۴ \times ۵^x + ۵$ را حل کنید.

تابع لگاریتمی:

می‌دانیم تابع نمایی یک به یک است پس وارون تابع یک تابع است که ما آن را تابع لگاریتم تعریف می‌کنیم.

تعریف تابع لگاریتم:

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = y = a^x$ است که ضابطهٔ آن به صورت $f^{-۱}(x) = log_a^x$ می‌باشد و a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است.

$$y = a^x \leftrightarrow x = log_a^y$$

حال نام x و y را عوض می‌کنیم $y = log_a^x$

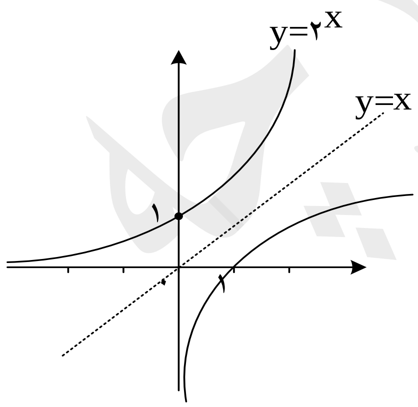
می‌خوانیم: لگاریتم x در مبنای a و می‌دانیم ($x > ۰$ و $\begin{matrix} a > ۰ \\ a \neq ۱ \end{matrix}$)

$$۲^۳ = ۸ \leftrightarrow log_۲^۸ = ۳$$

$$(\frac{۱}{۳})^{-۲} = ۹ \leftrightarrow$$

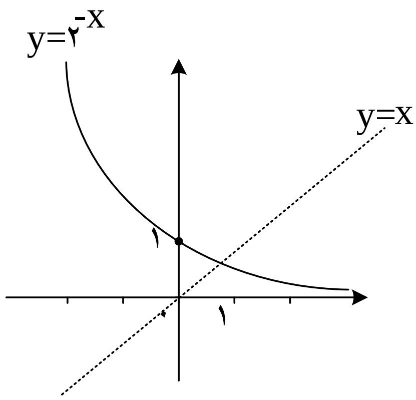
رسم تابع $y = log_۲^x$:

این تابع معکوس $y = ۲^x$ است. پس:



۱) $D = (۰ \text{ و } +\infty)$ و $R = \mathbb{R}$
۲) تابع $y = log_۲^x$ از نقطهٔ ۱ روی محور x می‌گذرد.
۳) تابع $y = log_۲^x$ همانند $y = ۲^x$ صعودی اکیداست.

رسم تابع $y = log_{\frac{1}{۲}}^{x}$:



۱) $D = (\cdot , +\infty)$ و $R = \mathbb{R}$

۲) $y = log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ نیز از $(۱و\cdot)$ می گذرد.

۳) این تابع همانند $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ نزولی اکید است.

نمودار آن را رسم کنید.

نکته۱) دامنه و برد تابع لگاریتم به ترتیب همان برد و دامنه تابع نمایی هستند.

نکته ۲) تابع لگاریتم برای $a > ۱$ صعودی اکید و برای $\cdot < a < ۱$ نزولی اکید است.

نکته: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد، به آن لگاریتم اعشاری می گوییم و معمولاً مبنای ۱۰ را نمی‌نویسیم.

مثال: $\log ۱۰۰۰ = log_{۱۰}^{۱۰۰۰} = ۳$

$\log \cdot/۰۰۰۱ = -۴$

مثال:

۱) $log_{a}^{a} =$ ۲) $log_{a}^{۱} =$ ۳) $log_{۲}^{\sqrt{۲}} =$

۴) $log_{۲}^{\cdot/۲۵} =$ ۵) $log_{۶۴}^{\frac{۱}{۸}} =$ ۶) $log_{۶}^{\frac{۱}{۳۶}} =$

مثال: اگر $f(x) = a^{x}$ و $f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۸$ باشد، $f^{-۱}(۱۶)$ را به دست آورید.

ویژگی‌های لگاریتم و قضایا:

۱) لگاریتم حاصلضرب عبارات $log_{c}^{ab} = log_{c}^{a} + log_{c}^{b}$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_{c}^{a} = m \rightarrow a = c^{m} \\ log_{c}^{b} = n \rightarrow b = c^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow ab = c^{m} \times c^{n} = c^{m+n}$$

$$\Longrightarrow log_{c}^{ab} = m + n \Longrightarrow log_{c}^{ab} = log_{c}^{a} + log_{c}^{b}$$

مثال: $\log ۶ = \log ۲ + \log ۳$

۲) لگاریتم عبارت توان‌دار: $log_{\,c}^{\,a^n} = n\, log_c^a$

اثبات: (طبق ویژگی ۱)

$$log_c^{a^n} = log_c^{a\times a\times \ldots \times a} = log_c^a + log_c^a + \cdots + log_c^a = n log_c^a$$

۳) لگاریتم تقسیم عبارات: $log_c^{\frac{a}{b}} = log_c^a - log_c^b$

اثبات:

$$\left.\begin{matrix} log_c^a = m \rightarrow a = c^m \\ log_c^b = n \ \rightarrow b = c^n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = c^{m-n} \Longrightarrow log_c^{\frac{a}{b}} = m - n$$

$$\Longrightarrow log^{\frac{a}{b}} = \ log_c^a - log_c^b$$

راه دیگر:

$$\frac{a}{b} = d \ \Longrightarrow a = bd \ \rightarrow$$

$$log_{\,c}^{\,a} = log_c^b + log_c^d \Longrightarrow log_c^d = log_c^a - log_c^b$$

نکته: همانند آنچه در کار در کلاس کتاب انجام دادیم و از روی نمودار داریم:

$$log_{۱۰}^{۲} \cong ۰/۳۰۱ \qquad\qquad log_{۱۰}^{۳} \cong ۰/۴۷۷$$

از این دو در بسیاری از مثالها استفاده می کنیم.

به طور مثال: اگر$۰/۳\sim \log ۲$ و $\log ۳ \sim ۰/۴۸$ را داشته باشیم، $\log ۵$ و $\log ۴۵$ را بیابید.

❉ ادامه ویژگی‌ها(اضافه بر مطالب درسی):

۴) $\boldsymbol{log_{c^m}^{a^n} = \frac{n}{m} log_c^a}$

اثبات:

$$\left.\begin{matrix} log_{c^m}^{a^n} = k \Longrightarrow a^n = (c^m)^k \Longrightarrow a^n = c^{mk} \\ log_c^a = k' \Longrightarrow a = c^{k'} \Longrightarrow a^n = c^{nk'} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow c^{mk} = c^{nk'}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{mk} = \mathrm{n}k' \Longrightarrow \mathrm{k} = \frac{n}{m} k'$$

مثال:

$$log_{\sqrt[۳]{a^{۲}}}^{\sqrt[۴]{a\sqrt[۳]{a}}} =$$

$$log_{۲}^{۵} - log_{۴}^{۱۰۰} =$$

۵) $\boldsymbol{log_{b}^{a} = \frac{۱}{log_{a}^{b}}}$

اثبات:

$$log_{a}^{b} = m \rightarrow a^{m} = b \Longrightarrow a = b^{\frac{۱}{m}} \Longrightarrow \frac{۱}{m} = log_{b}^{a} \Longrightarrow log_{b}^{a} = \frac{۱}{log_{a}^{b}}$$

مثال: $log_{۳}^{۱۰} = \frac{۱}{log_{۱۰}^{۳}} = \frac{۱}{۰/۴۸} \sim \frac{۱۰۰}{۴۸}$

۶) $\boldsymbol{a^{log_{a}^{b}} = b}$

اثبات:

$$log_{a}^{b} = x \rightarrow a^{x} = b$$

مثال: $۳^{log_{۳}^{۵}} = \_$

۷) $\boldsymbol{log_{b}^{a} = \frac{log_{c}^{a}}{log_{c}^{b}}}$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_{c}^{a} = m \rightarrow a = c^{m} \quad \xrightarrow{\text{به توان } n} a^{n} = c^{mn} \\ log_{c}^{b} = n \rightarrow b = c^{n} \quad \xrightarrow{\text{به توان } m} b^{m} = c^{nm} \end{array}\right\} \Longrightarrow a^{n} = b^{m}$$

$$\Longrightarrow log_{b}^{a^{n}} = m \Longrightarrow n\,log_{b}^{a} = m \Longrightarrow log_{b}^{a} = \frac{m}{n} \Longrightarrow log_{b}^{a} = \frac{log_{c}^{a}}{log_{c}^{b}}$$

مثال:

$$log_{۳}^{۲} =$$

۸) $\boldsymbol{b^{log_{c}^{a}} = a^{log_{c}^{b}}}$

اثبات:

$$\left.\begin{aligned} log_c^a = m \longrightarrow c^m = a \longrightarrow c^{mn} = a^n \\ log_c^b = n \longrightarrow c^n = b \longrightarrow c^{nm} = b^m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a^n = b^m$$

مثال:

$$۹^{\,log_۳^۵} =$$

۹) $\boldsymbol{log_b^a \times log_c^b \times log_d^c = log_d^a}$

اثبات:

$$\frac{log^a}{log^b} \times \frac{log^b}{log^c} \times \frac{log^c}{log^d}$$

مثال‌های بیشتر از ویژگی های لگاریتم:

مثال ۱) عبارت $۲ + ۳log_۲^۵ - log_۲^{۲۵}$ را به یک لگاریتم تبدیل کنید.

مثال ۲)

$$log_۲^{۲۰} =$$

تمرین ۱: اگر $log_۶^۲ = A$ باشد، حاصل $(log_۶^۳)^۲ - (log_۶^{۱۲})^۲$ را بیابید.

تمرین ۲:

$$log_۸ log_۴ log_۲^{۱۶} =$$

تمرین ۳:

$$log_{۵۰}^{۲} + log_{۵۰}^{\frac{۳}{۲}} + log_{۵۰}^{\frac{۴}{۳}} + \cdots + log_{۵۰}^{\frac{۵۰}{۴۹}} =$$

تمرین ۴*: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$۸۱^{\,log_۹^{\sqrt{۵}} + log_۳^{\sqrt[۴]{۲}}} =$$

تمرین ۵※:اگر $\log ۲ = ۰/۳$ باشد، $log_{۴}^{۶۲۵}$ را بیابید.

تمرین۶※: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۵^{۱+log_{۰/۲}^{۲}} =$$

حل معادلهٔ لگاریتمی

تابع لگاریتم یک به یک است پس $log_c^x = log_c^y \Leftrightarrow x = y$:

از تعریف لگاریتم، یک به یک بودن و ویژگیها در حل معادله لگاریتمی استفاده می کنیم.

نکته: جواب‌ها را باید چک کنیم که در دامنه تابع لگاریتم صدق می کنند.

دامنه تابع لگاریتمی:

$y = log_{B(x)}^{A(x)}$ $\quad A(x) > ۰$ و $B(x) > ۰$ و $B(x) \neq ۱$

اشتراک موارد بالا، دامنه تابع را مشخص می‌کند.

مثال※: دامنه تابع $y = log_{x+۲}^{۴-x^۲}$ چیست؟

$۴ - x^۲ > ۰$

x		-۲		۲	
۴-x²	-		+		-

$(-۲ و ۲)$

$$\Rightarrow D = (-۲ و ۲) - \{-۱\}$$

حال به حل چند معادلهٔ لگاریتمی می پردازیم:

مثال ۱) $log_{۲}^{x} = log_{۲}^{x^۲}$

حل با یک به یک بودن

جواب: $x = x^۲ \Rightarrow x(۱ - x) = ۰ \Rightarrow$ $x = ۰$ غ ق ق ، $x = ۱$ ق ق

مثال ۲) $log_{۵}^{x^۲-۲x-۱۴} = ۰$

حل با تعریف)

$x^{۲} - ۲x - ۱۴ = ۵^{۰} = ۱ \Longrightarrow x^{۲} - ۲x - ۱۵ = ۰$

$\Longrightarrow (x + ۳)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x = ۵ \\ x = -۳ \end{matrix}$

مثال ۳) $log^{(۳x+۱)} + log^{(x-۱)} = ۲log^{(x+۳)}$

حل با ویژگی‌ها)

تمرین*) $log_{x+۲}^{x^{۳}+۸} = ۲$

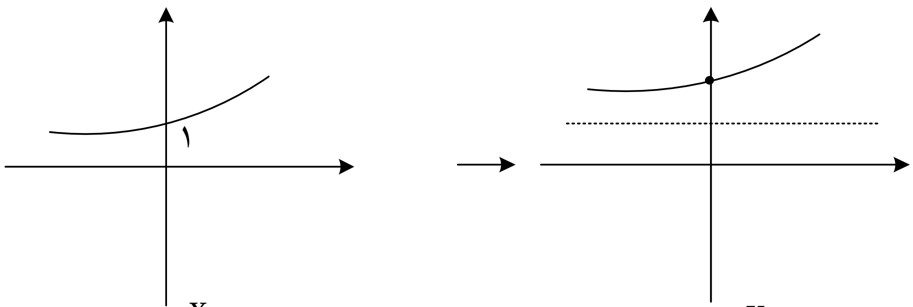
حل با تعریف: $(x + ۲)^{۲} = x^{۳} + ۸$

تمرین**) $(\sqrt{x})^{log_{۵}^{x}-۱} = ۵$

راهنمایی(حل با تعریف لگاریتم): $log_{(\sqrt{x})}^{۵} = log_{۵}^{x} - ۱ \Rightarrow$

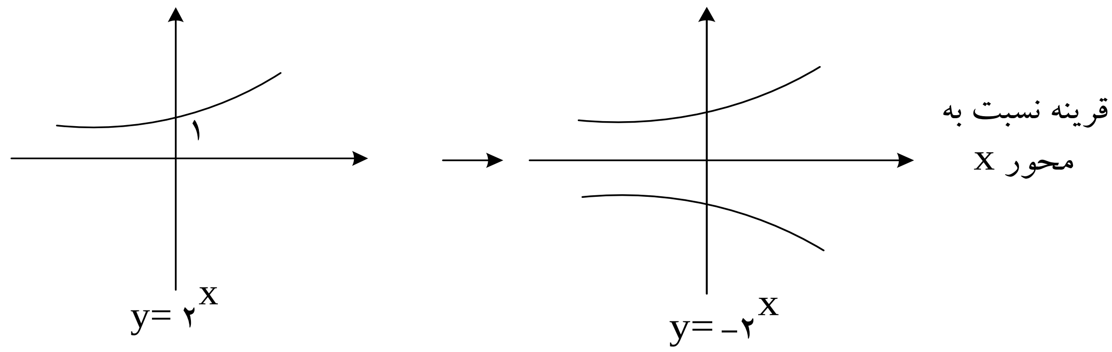
رسم تابع نمایی و لگاریتم با انتقال:

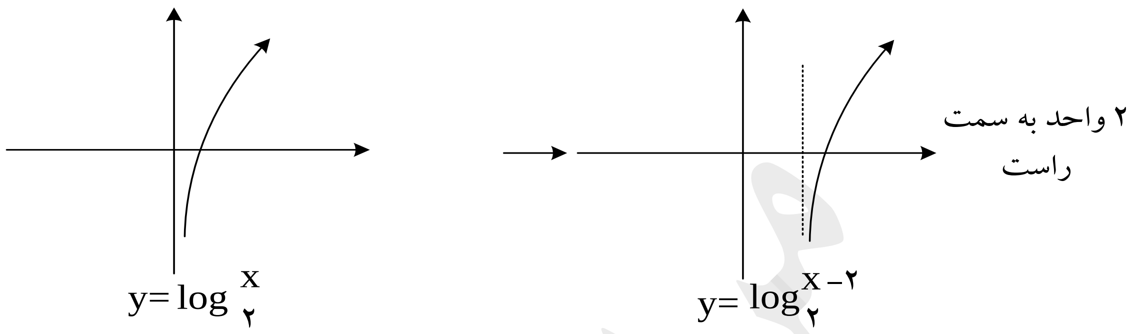
انتقال این تابع نیز همانند سایر توابع انجام می شود.



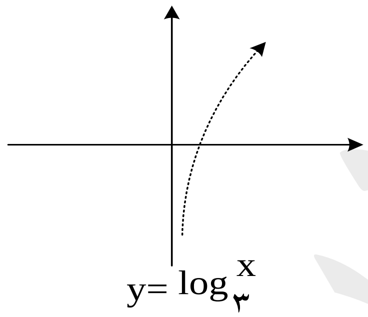
یک واحد به سمت بالا

$y = ۲^{x}$ $\qquad$ $y = ۲^{x} + ۱$

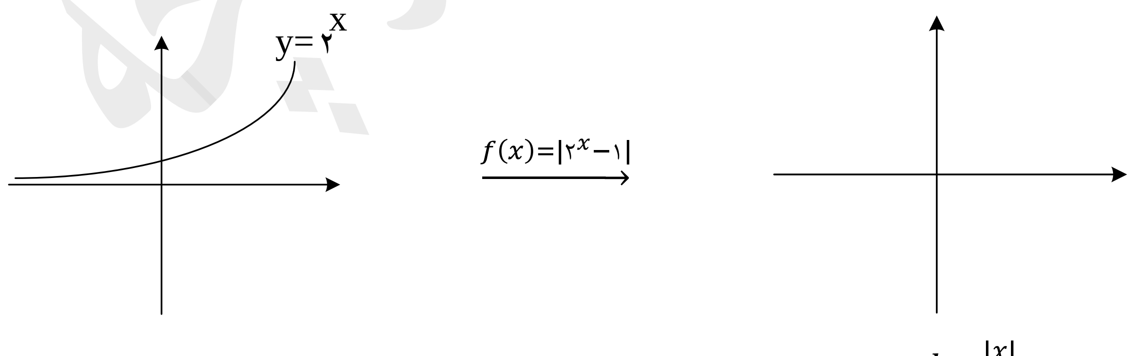




مثال: تابع $y = -log_{۳}^{-x}$ را رسم کنید.



مثال‌هایی از توابع با قدر مطلق:



تمرین: تابع $y = log_{۲}^{|x|}$را رسم کنید.

نکته: برای رسم بعضی توابع نمایی و لگاریتمی بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم:

مثال: $y = ۴ \times ۲^x \to y = ۲^۲ \times ۲^x = ۲^{x+۲}$ ۲ واحد به سمت چپ

مثال: $y = log_۳^{۹\,x} \to y = log_۳^۹ + log_۳^x = ۲ + log_۳^x$ ۲ واحد به سمت بالا

تمرین: دامنه و برد تابع زیر را با رسم بیابید.

$$f(x) = ۲^{x-۱} - ۲$$

کاربرد تابع نمایی

- مثال های تجربی از رشد باکتری و فرآیندهای آزمایشگاهی وجود دارد.

← **رشد باکتری از شروع کشت:** اگر مقدار اولیه A و در هر ساعت K برابر شوند، *f(t)* تعداد باکتری در زمان t را نشان می دهد: $f(t) = AK^t$

مثال: تعداد نوعی باکتری در هر ساعت ۲ برابر می‌شود، پس از چه زمانی ۱۰ برابر می شود؟

$$۱۰\ A = A(۲)^t \Longrightarrow ۱۰ = ۲^t \quad \Longrightarrow t = log_۲^{۱۰} = \frac{۱}{log_{۱۰}^۲} = \frac{۱۰}{۳} = ۳/۳\ ...$$

کاربرد تابع لگاریتم:

- کاربرد در محاسبه قدرت و انرژی زلزله

← **انرژی حاصل از زلزله:** در یک زلزله با بزرگی M ریشتر، اگر میزان انرژی آزاد شده، E (اِرگ) باشد داریم:

$$log^E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,M$$

$$\Longrightarrow E = ۱۰^{۱۱/۸+۱/۵\,M}$$

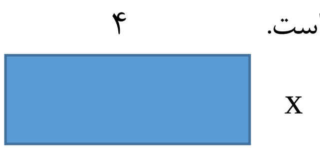
مثال: انرژی آزاد شده در زلزله ۶ ریشتری را با ۵ ریشتری مقایسه کنید.

مثال: زلزله‌ای که $۱۰^{۲۰}$ اِرگ انرژی آزاد می کند، چند ریشتر است؟

فصل ۶– حد و پیوستگی

به مثال ابتدای فصل در کتاب درسی توجه کنید.

در این مثال کتاب، طول مستطیلی ۴ است و x عرض مستطیل، متغیر است.



وf(x) مساحت مستطیل است که برابر است با $f(x) = ۴\,x$

با توجه به جدول در کتاب درسی، وقتی $x \to ۳^-$ یعنی x از چپ (مقادیر کمتر از ۳) به اندازه کافی به عدد ۳ نزدیک می شود، آنگاه $f(x) \to ۱۲$ یعنی $f(x)$ به مقدار دلخواه به عدد ۱۲ نزدیک می شود

و می نویسیم:

Limit مخفف← $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(x) = ۱۲$

و می خوانیم: حد تابع f(x) وقتی x از چپ به عدد ۳ نزدیک می شود، برابر ۱۲ است.

و به همین صورت برای حد راست، با توجه به جدول در کتاب درسی، اگر x از راست (مقادیر بیشتر از۳) به اندازه کافی به ۳ نزدیک شود، f(x) به مقدار دلخواه به عدد ۱۲ نزدیک می شود و داریم:

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = ۱۲$$

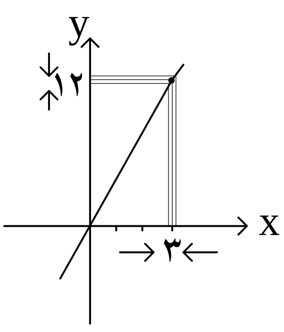
و می خوانیم: حد تابع f(x) وقتی x از راست به عدد ۳ نزدیک می شود، برابر ۱۲ است.

اگر حد چپ و راست تابع در یک نقطه موجود و برابر باشند، حد تابع در آن نقطه موجود است.

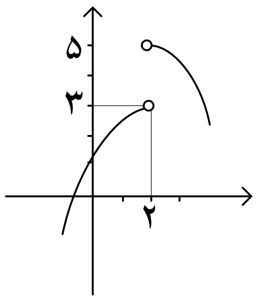
پس تابع f(x) در۳ = x حد دارد و حدش برابر ۱۲ است و به طور خلاصه می نویسیم:

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۲$$

با توجه به نمودار تابع مساحت $f(x) = y = ۴\,x$، نزدیک شدن f(x) به ۱۲، زمانی که x از چپ یا راست به ۳ نزدیک می شود، دیده می شود.



مثال: با توجه به شکل زیر حد تابع f را در $x = ۲$ بررسی کنید.



$$x \to ۲^{+} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \longrightarrow ۵$$
$$x \to ۲^{-} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \longrightarrow ۳$$

در این مثال، حد چپ موجود و برابر ۳، حد راست موجود و برابر ۵ است ولی تابع در x=۲ حد ندارد.

نکته: توجه کنیم که تابع در (aو۲) یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است. و در (۲وb) یک همسایگی چپ ۲ تعریف شده است که می توانیم از دو طرف به ۲ نزدیک شویم.

تعریف حد راست: هر گاه f در $(b$ و $x_{.})$ تعریف شده باشد و بتوان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به عدد l نزدیک کرد به شرط آن که x از سمت راست به $x_{.}$ نزدیک شود، در این صورت حد راست f در $x_{.}$ برابر l است و می نویسیم:

$$\lim_{x\longrightarrow x_{.}^{+}} f(x) = l$$

حد چپ: هر گاه f در $(x_{.}$ و $a)$ تعریف شده باشد و بتوان f را به اندازه دلخواه به عدد l نزدیک کرد به شرط آن که x از سمت چپ به $x_{.}$ نزدیک شود، در این صورت حد چپ f برابر l است و می نویسیم:

$$\lim_{x\longrightarrow x_{.}^{-}} f(x) = l$$

تعریف حد تابع: اگر f در بازهٔ $(b$ و $a)$ شامل $x_{.}$ (به جز احتمالاً خود $x_{.}$) تعریف شده باشد هر گاه حد چپ و راست f در $x_{.}$ موجود و برابر l باشدو آنگاه تابع در $x_{.}$ دارای حدی برابر l است و می نویسیم:

$$\lim_{x\longrightarrow x_{.}} f(x) = l$$

یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow x_{.}^{+}} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\longrightarrow x_{.}^{-}} f(x) = l\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_{.}} f(x) = l$$

جمع بندی: شرایط کلی وجود حد تابع در $x = x_0$

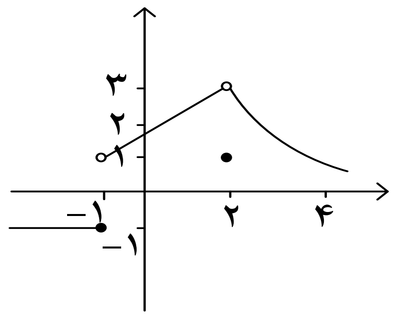
۱) f در (a,b) شامل x_0 (احتمالاً به جز x_0) تعریف شده باشد.

۲) حد چپ و راست f در x_0 موجود باشد.

۳) حد چپ= حد راست

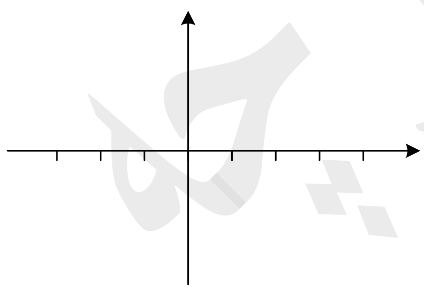
چند مثال خوب:

۱) حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) + \lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) + f(۲)$ را با توجه به نمودار تابع f بیابید.



۲) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{|x|}{x} = ?$

(ابتدا نمودار $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را می کشیم)



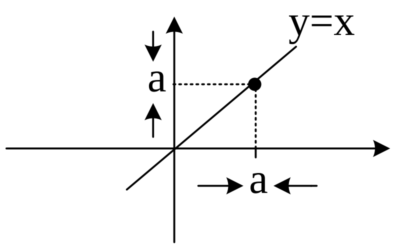
تمرین ❋: با توجه به تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in z \\ -۲ & x \notin z \end{cases}$ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\lim_{x \to \sqrt{۲}} f(x) + \lim_{x \to ۲} f(x) =$$

محاسبه ی حد توابع:

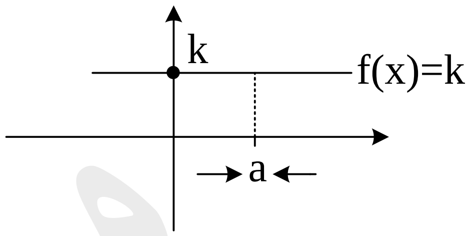
۱) حد تابع همانی $f(x) = x$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$



۲) حد تابع ثابت $f(x) = k$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$



$$if \quad \begin{array}{l} \lim_{x\to a} f_۱(x) = l_۱ \\ \lim_{x\to a} f_۲(x) = l_۲ \end{array}$$

۳) حد مجموع توابع: $\lim_{x\to a} f_۱(x) + f_۲(x) = \lim_{x\to a} f_۱(x) + \lim_{x\to a} f_۲(x) = l_۱ + l_۲$

۴) حد حاصلضرب توابع $\lim_{x\to a} f_۱(x) \cdot f_۲(x) = l_۱ \cdot l_۲$

۵) حد تقسیم توابع $\lim_{x\to a} \frac{f_۱(x)}{f_۲(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_۱(x)}{\lim_{x\to a} f_۲(x)} = \frac{l_۱}{l_۲}$

$$If \qquad \lim_{x\to a} f_۲(x) = l_۲ \neq ۰$$

۶) $if \quad \lim_{x\to a} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x\to a} f^n(x) = l^n$

$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ و $if \quad n = ۲k \quad \to l > ۰$ و

۷) $if \quad \lim_{x\to a} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kl$

۸) **نتیجه از روابط بالا**: حد تابع چند جمله ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه یکسان است.

نکته: در بیشتر موارد به جز مواردی خاص، برای محاسبه ی حد تابع، کافی است مقدار مورد نظر را در تابع به جای متغیر بگذاریم.

مثال:

$$\lim_{x\to ۱} ۳x^۳ - ۵x^۲ + ۷ = ۳(\lim_{x\to ۱} x)^۳ - ۵(\lim_{x\to ۱} x)^۲ + \lim_{x\to ۱} ۷ = ۳ - ۵ + ۷ = ۵$$

مثال) اگر $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱$ و $\lim_{x\to ۳} g(x) = ۲$ باشد، حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}(۲ f(x))^{۴} =$$

$$\lim_{x\to ۳}\left(g^{۵}(x) + \sqrt[۳]{f(x)}\right) =$$

حد تابع گویا $\frac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$:

با توجه به قوانین محاسبه حد با مقدارگذاری در صورت و مخرج حد به دست می آید.

$$۱)\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۵}{۴x+۱} = \frac{۲^{۲}-۵}{۴\times ۲+۱} = -\frac{۱}{۹}$$

$$۲)\lim_{x\to ۱}\frac{۳^{x}-۱}{x^{۳}} =$$

نکته مهم: اگر پس از مقدار گذاری مقدار حد مبهم باشد، مثلا($\frac{۰}{۰}$)، ابتدا عامل ابهام را از صورت و مخرج حذف می کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{x-۱} =$$

در این حد عامل ابهام : $x - ۱$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{x-۲} =$$

حد تابع رادیکالی: در مورد حد توابع رادیکالی دقت کنیم که عبارت زیر رادیکال باید در یک بازه حول نقطه مورد نظر تعریف شده باشد.

مثال) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}$

$\lim_{x\to ۳^{+}}\sqrt{۲x-۶} = ۰$ ولی $\lim_{x\to ۳^{-}}\sqrt{۲x-۶} = \sqrt{۰^{-}}$ تعریف نشده

حد وجود ندارد←

مثال) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{x^{۲}-۲}$

حد توابع مثلثاتی

$$\lim_{x\to \alpha}\sin x = \sin\alpha \qquad \lim_{x\to \alpha}\cos x = \cos\alpha$$

مثال) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sin x\cos x =$

حد توابع با جزء صحیح

$\lim\limits_{x \to a} [u]$

- اگر u عدد صحیح شود ⟵ حد چپ و راست را جدا حساب می کنیم.
- اگر u غیر صحیح شود ⟵ حد فقط با جایگذاری

مثال) $\lim\limits_{x\to ۳}[x] \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+}[x] = ۳ \\ \quad x > ۳ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}[x] = ۲ \\ \quad x < ۳ \end{cases}$ در x=3 حد ندارد

مثال) $\lim\limits_{x\to \frac{۵}{۲}}[۲x] =$

مثال) $\lim\limits_{x\to ۱}\left[۲x + \frac{۳}{۲}\right] =$

مثال) $\lim\limits_{x\to \pi}[x] - ۳ =$

مثال) $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x^۲ + x] = [۲^۲ + ۲^+] = [۶^+] = ۶$

مثال: مقدار a را طوری بیابید که $f(x) = a[x] + |x|$ در $x = ۰$ حد داشته باشد.

حد توابع با قدر مطلق

محاسبه حد با جایگذاری نقطه است.

مثال) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۲|x|}{x-۳} =$

فقط در حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{|x-a|}{x-a}$ حد چپ و حد راست جدا حساب می‌شوند.

مثال) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{|x-۱|}{x-۱} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱} = \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱} = \end{cases}$

حد توابع چند ضابطه ای: در مورد توابع چند ضابطه ای، بیشتر در نقاطی که ضابطه عوض می شود ممکن است حد موجود نباشد و البته در نقاط دیگر هم امکان عدم وجود حد، هست.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x-۳ & x\leq -۱ \\ -x^{۲}+۵ & -۱<x<۱ \\ [x]+۳ & x\geq ۱ \end{cases}$ حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to -۱} f(x)=?$

ب) $\lim_{x\to ۱} f(x)=?$

ج) $\lim_{x\to -۲} f(x)=?$

د) $\lim_{x\to ۲} f(x)=?$

مثال) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+a & x<۰ \\ x^{۲}-[x] & x\geq ۰ \end{cases}$ در نقطهٔ x=۰ حد داشته باشد.

تمرین: تابع زیر را رسم کنید و حد تابع در نقطه $x=۱$ و $x=۲$ و $x=۳$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۲ & x\leq ۱ \\ x^{۲}-۲ & ۱<x\leq ۲ \\ ۲ & x>۲ \end{cases}$$

تمرینات کلی:

تمرین۱ : حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} x[x] - ۲[x] =$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-[x]}{x-[x]} =$

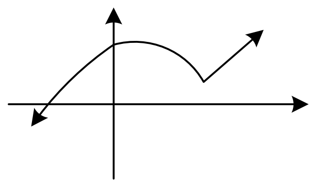
ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x^۲ - ۴} =$

د) $\lim\limits_{x\to -۲} [۲\,x] =$

تمرین۲: حد تابع $f(x) = \begin{cases} ۴ - x & x \geq ۲ \\ x^۲ - ۲ & x < ۲ \end{cases}$ را در x = ۲ با رسم شکل مشخص کنید.

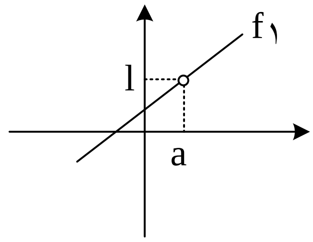
تمرین ۳**) نمودار تابع $f(x) = \frac{|x^۲-۲\,x|}{x-۲}$ را رسم کنید و بگویید در چه نقاطی حد ندارد؟

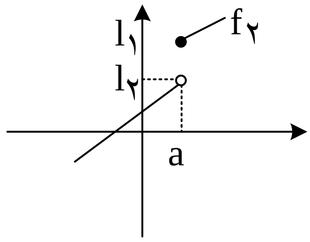
پیوستگی:



اگر فعالیت کتاب درسی را بررسی کنیم، می بینم که شکل هایی که بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم شوند، پیوسته اند.

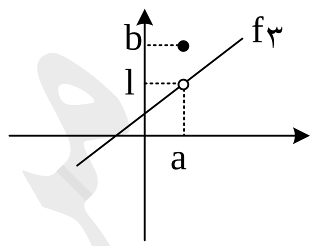
پیوستگی را با چهار شکل زیر بررسی می کنیم.

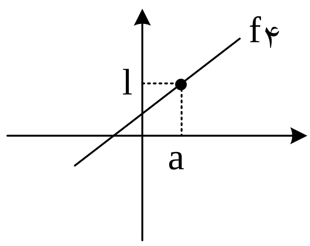




۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ولی $f(a)$ تعریف نشده

۲) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_۱ = f(a)$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_۲$





۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$
ولی $l \neq f(a) = b$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l = f(a)$

مفهوم پیوستگی در شکل ۴ دیده می شود.

تعریف پیوستگی تابع fدر x=a:

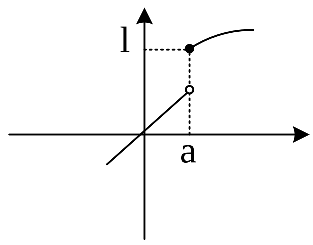
۱) f در a تعریف شده باشد. (در شکل ۱، f در a تعریف نشده است)

۲) f در a حد داشته باشد. (در شکل ۲، f در a حد ندارد.)

۳) حد تابع با مقدار تابع در x=a برابر باشد. (در شکل ۳، f در a حد دارد ولی با f(a) یکسان نیست)

پیوستگی چپ و راست

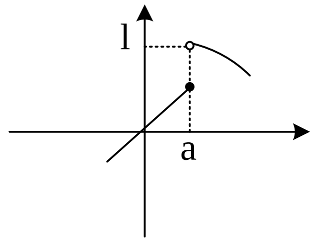
پیوستگی راست: تابع f در $x = a$ از راست پیوسته است هرگاه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

پیوستگی چپ: تابع f در $x = a$ از چپ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$



تابع f در $x = a$ پیوسته است هرگاه f از چپ و راست در $x = a$ پیوسته باشد.

مثال ۱) پیوستگی تابع $f(x) = [x] + ۲$ را در $x = ۱$ بررسی کنید.

مثال ۲) تابع $f(x) = \begin{cases} ax^۲ & x < ۱ \\ \frac{۲x-۳}{۵} & x \geq ۱ \end{cases}$ به ازای چه مقدار a پیوسته است؟

مثال ۳) a را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۹}{x+۳} & x \neq -۳ \\ ۲a + ۳ & x = -۳ \end{cases}$ در $x = -۳$ پیوسته باشد.

تمرین ۱) a را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۹ & x \neq -۳ \\ ۳a + ۳ & x = -۳ \end{cases}$ در $x = -۳$ پیوسته باشد.

تمرین ۲*) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^۳ + ۱ & x < ۰ \\ [x] & x \geq ۰ \end{cases}$ را در تمام نقاط دامنه اش بررسی کنید.

پیوستگی در یک بازه

- f در $(a \text{ و } b)$ پیوسته است هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.
- f در $[a \text{ و } b]$ پیوسته است هرگاه در بازهٔ $(a \text{ و } b)$ پیوسته باشد، در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

۱) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ ۲) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

- f در R پیوسته است هرگاه در هر نقطه از R پیوسته باشد.

مثال: تابع $f(x)=sinx$ و $f(x)=\cos x$ و $f(x)=۲^{x}$ و

همینطور توابع چند جمله ای در R پیوسته اند.

مثال: تابع $y=log_{۲}^{x}$ در $(۰ \text{ و } +\infty)$ پیوسته است یعنی روی دامنه اش.

مثال: تابع $y=\sqrt{x-۳}$ و $y=\frac{۱}{(x-۱)(x^{۲}-۴x)}$ در چه بازه هایی پیوسته هستند؟

$y=\frac{۱}{(x-۱)(x^{۲}-۴x)}$ $\qquad D=R-\{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۴\}$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\le -۱ \\ ۲x+۱ & -۱<x<۲ \\ x & x\ge ۲ \end{cases}$ در چه بازهایی پیوسته است؟ (با رسم نمودار)

تمرین ۱※)به ازای چه مقدار a تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{۳x^{۲}+ax+(a-۳)}}$ در R پیوسته است؟

تمرین ۲※) «تست»: در کدام یک از بازه های زیر، تابع $y=\sqrt{۹-x^{۲}}+\log(x-۲)$ پیوسته است؟

۱) $[-۳ \text{ و } ۳]$ ۲) $[۰ \text{ و } ۳]$ ۳) $(۲ \text{ و } ۳]$ ۴) $[۲ \text{ و } ۳]$

تمرین ۳※) «تست کنکور ۹۰»: اگر $f(x)=\begin{cases} ax+b & |x|\ge ۱ \\ x[x] & |x|<۱ \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=۳$ را با کدام عرض قطع می کند؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

فصل ۷–آمار و احتمال

بخش احتمال

یادآوری مطالب گذشته با حل چند مثال:

۱) در یک خانواده سه فرزندی احتمال این که حداکثر یک دختر وجود داشته باشد، چقدر است؟

A ={(پ پ پ)، (د پ پ)، (پ د پ)، (پ پ د)}

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=$$

۲) در پرتاب ۲ تاس احتمال این که اعداد رو آمده مثل هم نباشند، چقدر است؟

احتمال متمم: $P(A')=۱-P(A)=$

احتمال رخ دادن پیشامد A یا B :

$$P(A\ \cup\ B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$P(A\cap B)$: احتمال رخ دادن هر دو پیشامد A و B را نشان می دهد.

پیشامدهای ناسازگار: A و B ناسازگارند هرگاه: $A\cap B=\emptyset$ و $P(A\cap B)=۰$

پیشامدی که فقط A رخ دهد و B رخ ندهد: A-B

پیشامدی که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند (A یا B نه هر دو):

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(B-A)\cup(A-B)$$

مثال۱: اگر احتمال گروه خونی A^+، ۰/۳ و احتمال گروه خونی O^+، ۰/۴ باشد، احتمال این که نرگس گروه خونی A^+ یا O^+ داشته باشد چقدر است؟

$P(A^+)=۰/۳ \qquad P(O^+)=۰/۴$

$P(A^+\cup O^+)=$

مثال۲: در کیسه ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز قرار دارند. ۳ مهره به تصادف بر می داریم. با چه احتمالی فقط ۲ مهره همرنگ هستند.

احتمال شرطی: $P(A|B)$

یعنی اگر بدانیم B رخ می دهد، احتمال رخ دادن A چیست؟

مثال: اگر در پرتاب تاس زوج بیاید، احتمال این که مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

P (زوج آمدن| مضرب ۳)

در این جا فضای نمونه محدود می شود به زوج ها: $A = \{۶\}$ $S' = \{۶و ۴و ۲\}$

$$= \frac{n(\text{زوج و مضرب ۳})}{n\left(\text{زوج}\right)} = \frac{۱}{۳}$$

پس **فرمول احتمال شرطی** عبارت است از:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

با شرط $P(B) \neq ۰$

و احتمال رخ دادن پیشامد $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ که از فرمول احتمال شرطی به دست می آید.

چند مثال:

مثال۱) (تست کنکور ریاضی): در پرتاب تاس اگر عدد رو آمده مضرب ۳ نباشد، احتمال این که عدد ظاهر شده ۲ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

مثال ۲) تحصیلات کارمندان اداره برق به صورت جدول زیر است:

	زن	مرد
دانشگاهی	۱۰	۱۵
کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

احتمال این که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

مثال۳) اگر $P(A|B) = ۰/۶$ و $P(A) = ۰/۴$ و $P(B) = ۰/۵$ باشد، $P(B|A)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷۵

مثال ۴) در پرتاب ۲ تاس می دانیم مجموع ۲ عدد کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

تمرین ۱) اگر ۲۰ درصد افراد گروه خونی A و ۵۰ درصد گروه خونی B داشته باشند، اگر شخصی به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم گروه خونی او A نیست احتمال این که گروه خونی اش B باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

تمرین۲) از بین ۴ کتاب ریاضی و ۵ کتاب فیزیک، ۳ کتاب با هم و به تصادف بر می داریم. اگر حداقل ۲ کتاب ریاضی باشد، احتمال آن که هر سه کتاب ریاضی باشند، چقدر است؟

تمرین ۳): اگر احتمال ابتلا به بیماری قند در سن ۵۰ سالگی ٪ ۰/۳ و احتمال ابتلا به بیماری چربی در این سن٪ ۰/۲ باشد و بدانیم در صورت ابتلا به بیماری چربی احتمال ابتلا به بیماری قند به ٪ ۰/۵ افزایش می یابد، با چه احتمالی یک فرد ۵۰ ساله به حداقل یکی از این دو بیماری مبتلا می گردد؟

تمرین ۴ *(تست کنکور ریاضی): اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوریکه $P(A) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۲۲$ و $P(B|A) = ۰/۷$ آنگاه $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۹۶

پیشامدهای مستقل:

پیشامدهایی هستند که وقوع یکی بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نمی گذارد. مثل پرتاب سکه و تاس.

یعنی $P(A|B) = P(A)$

مثال) (فرزند دوم پسر) P =(فرزند اول پسر| فرزند دوم پسر)P

پسر یا دختر بودن هر فرزند به فرزند دیگر بستگی ندارد.

و فرمول دیگر:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر A و B مستقل باشند $= P(A|B) = P(A) \Longrightarrow \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

نکته: استقلال دو پیشامد را با ناسازگاری اشتباه نگیریم. در ناسازگاری اصلاً با هم اتفاق نمی افتند:

$A \cap B = \emptyset$

مثال۱: در یک خانواده ۲ فرزندی احتمال این که اولی دختر و دومی پسر باشد، چقدر است؟

مثال۲: در ایران احتمال قهرمانی فوتبال در جام جهانی ۰/۴ و احتمال قهرمانی تیم والیبال۸ /۰ است. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو تیم قهرمان می شوند؟

عدم استقلال: A و B از هم مستقل نیستند هرگاه:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

نکته: گاهی تشخیص استقلال پیشامدها با توجه به مفاهیم آن سخت است.

پس با بررسی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ به استقلال یا عدم استقلال پیشامدها پی می بریم.

مثال۱ : آیا در پرتاب دو تاس، در هر یک از حالات زیر، دو پیشامد مستقلند؟

الف) مجموع ارقام دو تاس ۷ باشد=A و تاس اول ۴ بیاید=B

ب) مجموع ارقام دو تاس ۷ باشد=A و ارقام دو تاس مثل هم باشند=B

مثال ۲: بهار با احتمال ۰/۷ و صبا با احتمال ۰/۸ در کنکور قبول می شوند. با چه احتمالی فقط یکی از آن ها قبول می شود؟

مثال ۳ : از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۷ دانش آموز ریاضی، دو نفر را پشت سر هم انتخاب می کنیم.با کدام احتمال اولی ریاضی و دومی تجربی است؟

تمرین*) درکیسه ای ۶ توپ قرمز و ۹ توپ آبی وجود دارد. ابتدا ۴ توپ از کیسه خارج می کنیم و سپس ۴ توپ دیگر خارج می کنیم. احتمال این که ۴ توپ اول قرمز و ۴ توپ دوم آبی باشند، چقدر است؟

بخش آمار

۱-شاخص های مرکزی: محل تمرکز داده ها را نشان می دهند.

۱) **میانگین**: $\overline{x}=\frac{\sum_{1}^{n}x_i}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

۲) **میانه** Q_2: داده ای که پس از مرتب کردن داده ها از کوچک به بزرگ، نیمی از داده‌ها قبل و نیمی از داده ها بعد از آن قرار دارند.

تعداد داده ها زوج: میانگین دو داده وسط.

تعداد داده ها فرد: داده ای است که پس از مرتب کردن وسط همه ی داده هاست.

مثال: میانه داده های زیر را بیابید.

۱۱، ۴، ۷، ۵، ۲، ۳، ۵، ۱۰، ۸، ۵

حل: ۱۱، ۱۰، ۸، ۷، ۵، ۵، ۵، ۴، ۳، ۲

$$Q_2=\frac{5+5}{2}=5$$

۳) **مد**: داده ای با بیشترین فراوانی

نکته: اگر داده ها با عددی ثابت جمع شوند، میانگین نیز با همان عدد جمع می شود و اگر داده ها در عددی ضرب شوند، میانگین نیز در همان عدد ضرب می شود.

۲-شاخص های پراکندگی: میزان دوری و نزدیکی داده ها از میانگین شان را نشان می دهند.

۱- **دامنه تغییرات**: D=b-a

a کوچکترین داده و b بزرگترین داده است.

نکته: مجموع اختلاف داده ها از میانگین همواره صفر است.

۲-**واریانس**: میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین.

نکته: واحد واریانس مربع واحد داده هاست.

$$\sigma^{۲} = \frac{(x_{۱} - \overline{x})^{۲} + (x_{۲} - \overline{x})^{۲} + \cdots + (x_n - \overline{x})^{۲}}{n}$$

ویژگی های واریانس:

۱) اگر داده ها با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس تغییر نمی کند. (اثبات به عنوان تمرین)

۲) اگر داده ها در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس در مجذور آن مقدار ضرب می شود. (اثبات به عنوان تمرین)

۳-**انحراف معیار**: جذر واریانس است و واحد آن با واحد داده ها یکسان است.

واریانس پراکندگی را بیش از حد انتظار نشان می دهد و انحراف معیار بهتر است و از طرفی واحد آن با داده ها یکسان است.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_{۱} - \overline{x})^{۲} + (x_{۲} - \overline{x})^{۲} + \cdots + (x_n - \overline{x})^{۲}}{n}}$$

۴-**ضریب تغییرات**: (نسبت انحراف معیار به میانگین)

در این شاخص واحد از میان می رود و مقایسه ی دو جامعه با واحدهای متفاوت بهتر انجام می شود.

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

نکته: اگر به داده ها مقداری ثابت اضافه شود، $\sigma^{۲}$ بدون تغییر می ماند پس σ هم تغییر نمی کند ولی $\overline{x}$ به همان میزان تغییر می کند، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x} + k}$$

$if \qquad K > ۰$ کاهش می یابد CV

$if \qquad K < ۰$ افزایش می یابد CV

تمرین۱: اگر همه داده ها در مقدار ثابتی ضرب شوند، CV چه تغییری می کند؟

تمرین۲: ضریب تغییرات سن دانش آموزان کلاس شما، ۳ سال دیگر چه تغییری می کند؟

شاخص دیگر

(Q_1) چارک اول: میانه نیمه ی اول داده ها پس از مرتب کردن داده ها

(Q_3) چارک سوم: میانه نیمه دوم داده ها پس از مرتب کردن داده ها

دامنه ی میان چارکی: $D = Q_3 - Q_1$

به عنوان یک شاخص پراکندگی استفاده می شود.

مزیت دامنه میان چارکی در این است که داده های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ حذف می شوند.

مثال: دامنه میان چارکی و انحراف معیار را در داده های زیر بیابید.

۱۴، ۱۰، ۷، ۵، ۳، ۳