

فصل اول ریاضی دوازدهم تجربی

انتقال توابع - ترکیب توابع - قاب وارون

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی

نکات کنکوری و سوالات چهار گزینه ای

حل تمامی تمرین ها ، فعالیت ها و کارد در کلاس ها

مؤلف:

حیب‌هاشمی

۱۳۹۷

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبيب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پژوهش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و با به آیدی تلگرام @habib_hasemi پیام دهید.

ایستاگرام: [academy.riazi](#)

سایت ریاضیکده [www.riazikade.ir](#)

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کanal تلگرامی [@eshgheriazikonkour](#)

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمينی کنکور

تهران و کرج

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب مبحث «**فصل اول ریاضی دوازدهم تجربی**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
- ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
- ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلاً بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
- ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
- ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت‌های محاسبات صوری و درک مفهومی.
- ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
- ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
- ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه‌های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه‌ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دییران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و ثبت نماید. ارائه‌ی نظرات شما دانش پژوهان، دییران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

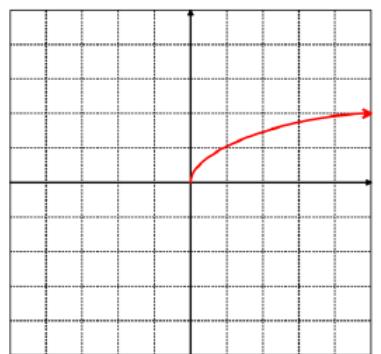
حیب‌اله‌اشمی

درس اول بخش اول

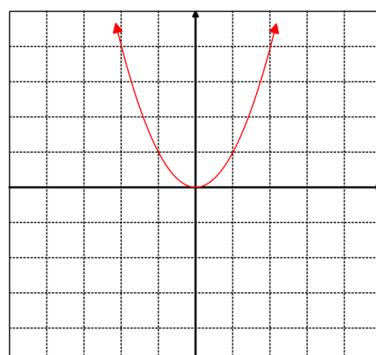
رسم نمودار توابع به کمک انتقال

یاد آوری نمودارهای قابل استفاده در انتقال

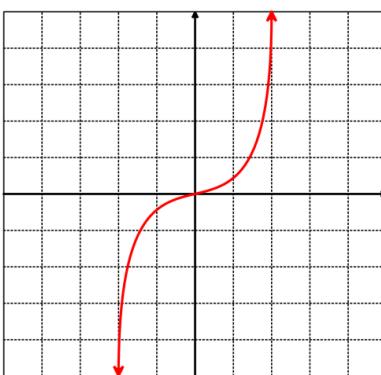
$$y = \sqrt{x} \quad \text{(الف) تابع رادیکالی (ابرو)}$$



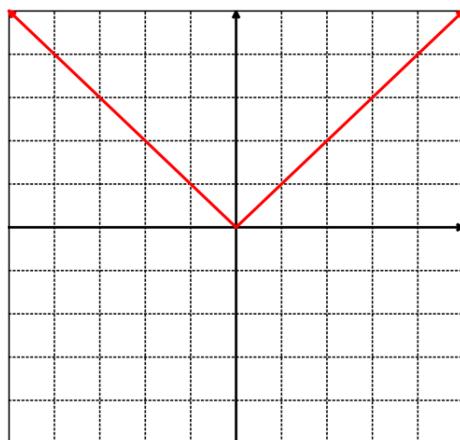
$$y = x^2 \quad \text{(ب) درجه ۲ (سهمی)}$$



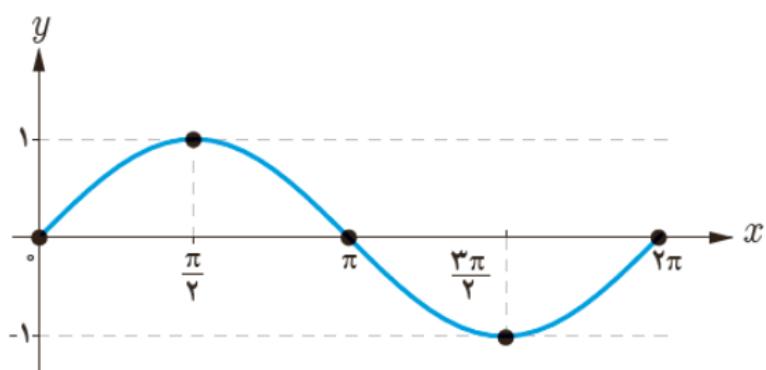
$$y = x^3 \quad \text{(پ) درجه ۳ (لر)}$$



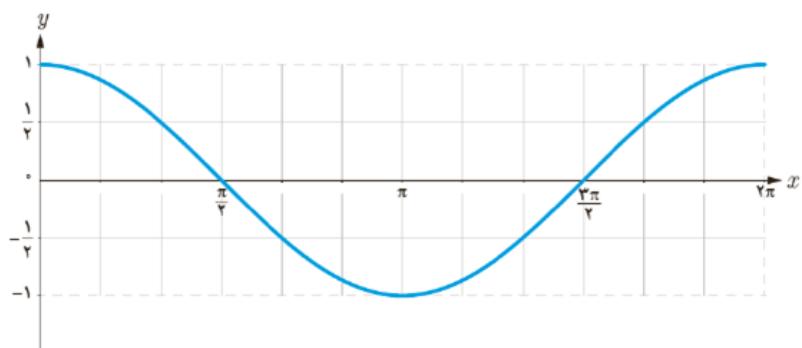
ت) تابع قدر مطلق $y = |x|$



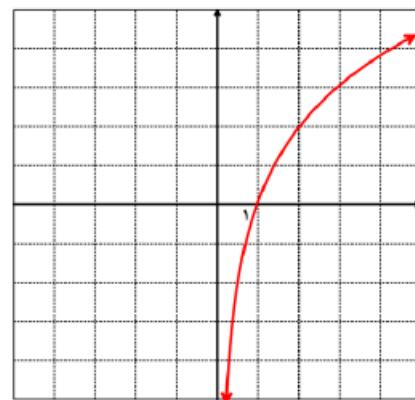
ث) تابع سینوسی $y = \sin x$



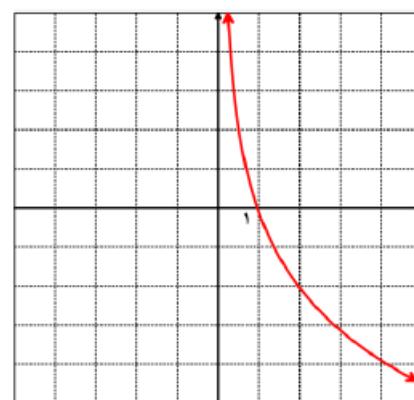
ج) تابع کسینوسی $y = \cos x$



چ) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$

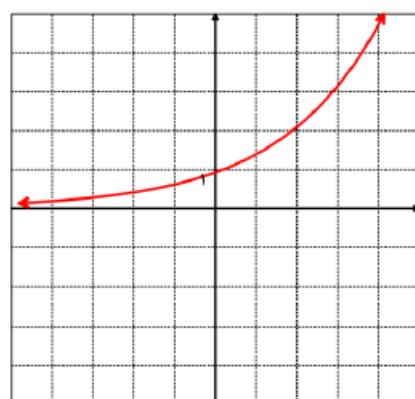


$$a > 1$$

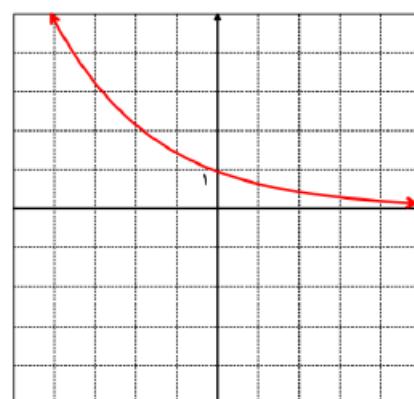


$$0 < a < 1$$

ح) تابع نمایی $y = a^x$



$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$

الف) انتقال طولی و عرضی (در این حالت عددی با x یا $f(x)$ جمع یا تفریق می شود) (تاثیر جمعی (تفریقی))

انتقال طولی (انتقال قطاری)

برای رسم نمودار تابع $y = f(x + a)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت چپ

انتقال دهیم.

برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت راست

انتقال دهیم.

نکته: (چون a تو خونه‌ی x است روی x (طولها) تاثیر می‌zarه) یعنی تک تک نقاط تابع $y = f(x)$ مقدار x آنها با a جمع

یا تفریق می شود. (اگر مثبت داشتیم تفریق می کنیم و بالعکس)

نکته: تاثیر روی طول ها (x) معکوس است یعنی اگر مثبت داشتیم به سمت منفی ها میریم و بالعکس

انتقال عرضی (انتقال آسانسوری)

برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا

انتقال دهیم.

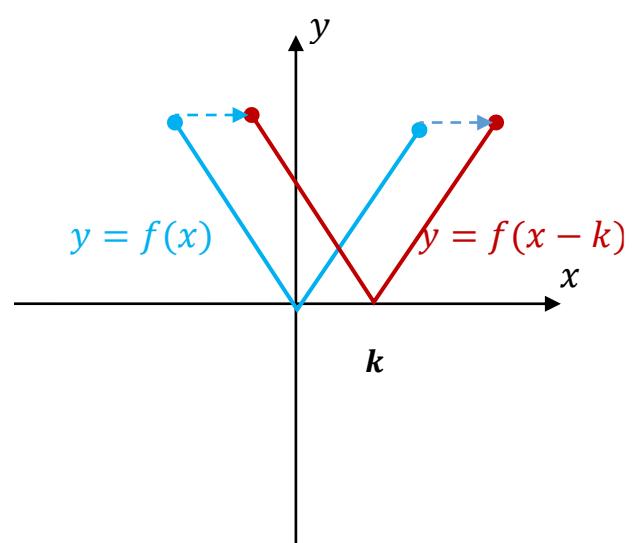
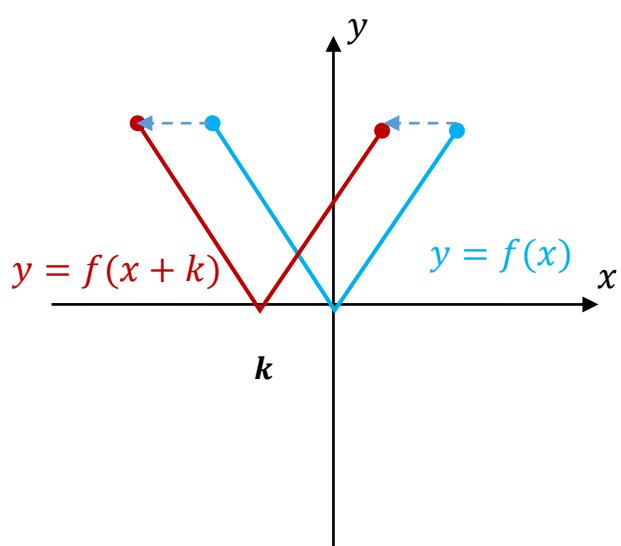
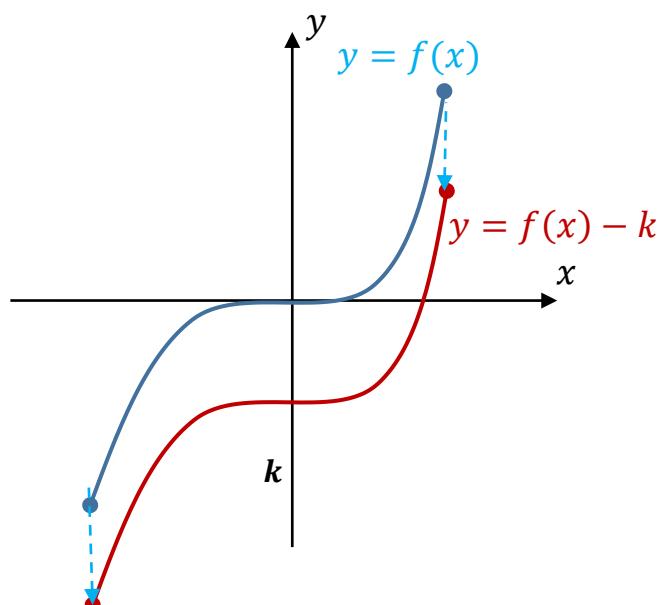
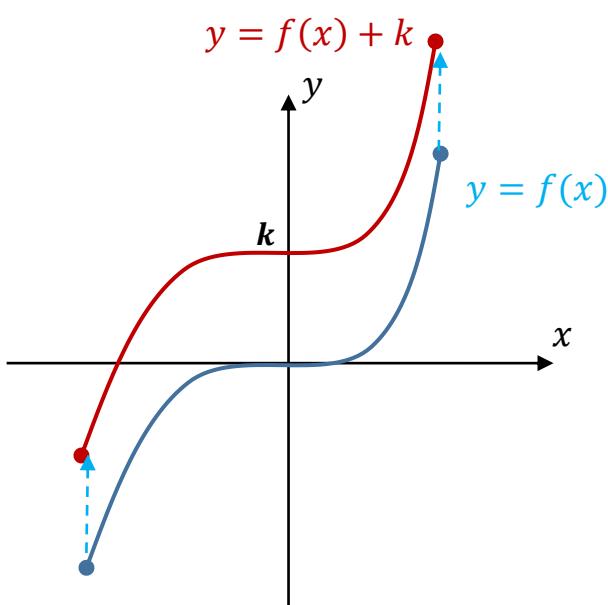
برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت پایین

انتقال دهیم.

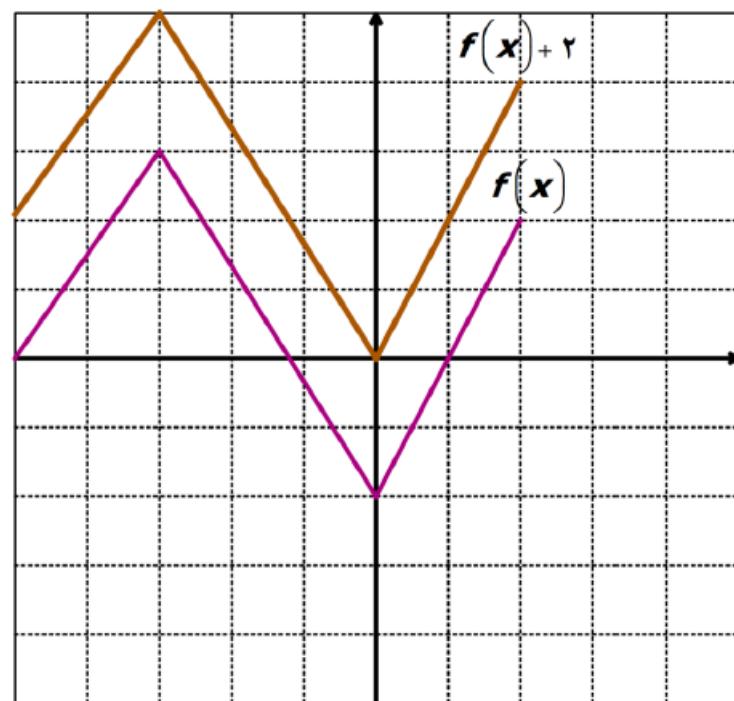
نکته: (چون a می‌توانه بیاد کنار y تو خونه‌ی y است پس روی y (عرضها) تاثیر می‌zarه) یعنی تک تک نقاط تابع $y = f(x)$ مقدار y آنها با a جمع یا تفریق می شود. (اگر مثبت داشتیم جمع می کنیم و اگر منفی داشتیم تفریق می کنیم)

نکته: تاثیر روی عرض ها (y) مستقیم است یعنی اگر مثبت داشتیم به سمت مثبت ها میریم و اگر منفی داشتیم به

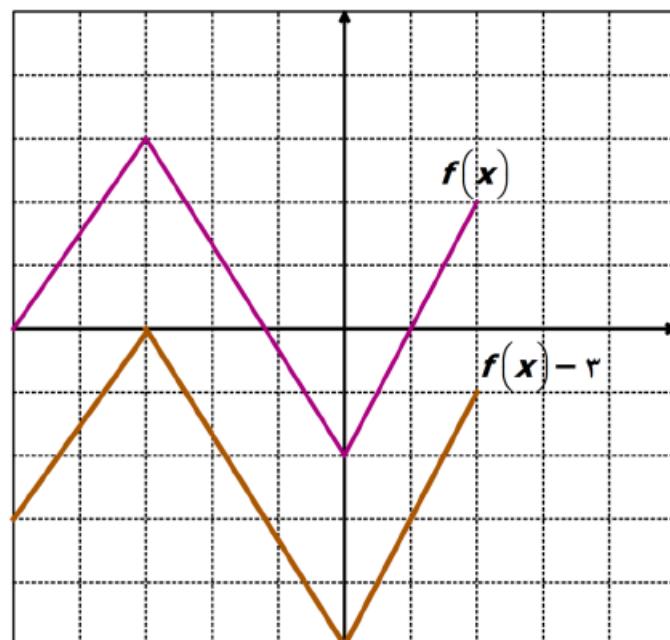
سمت منفی ها.



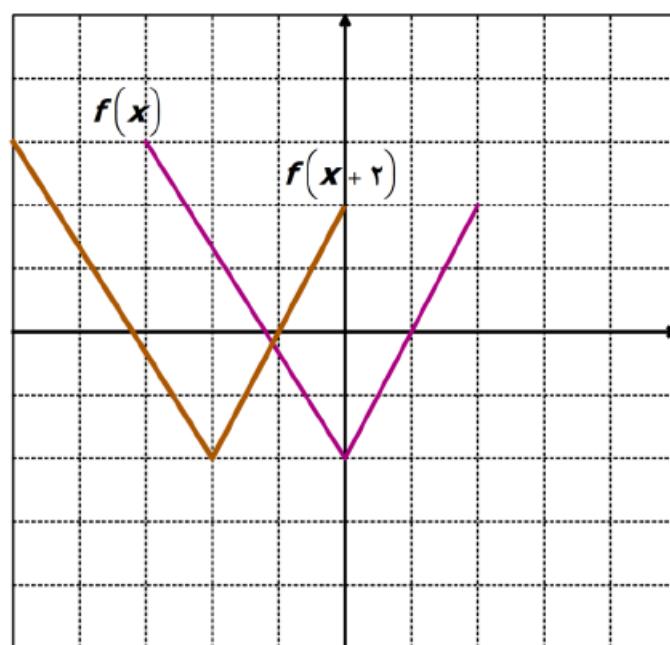
الف $f(x) + 2$



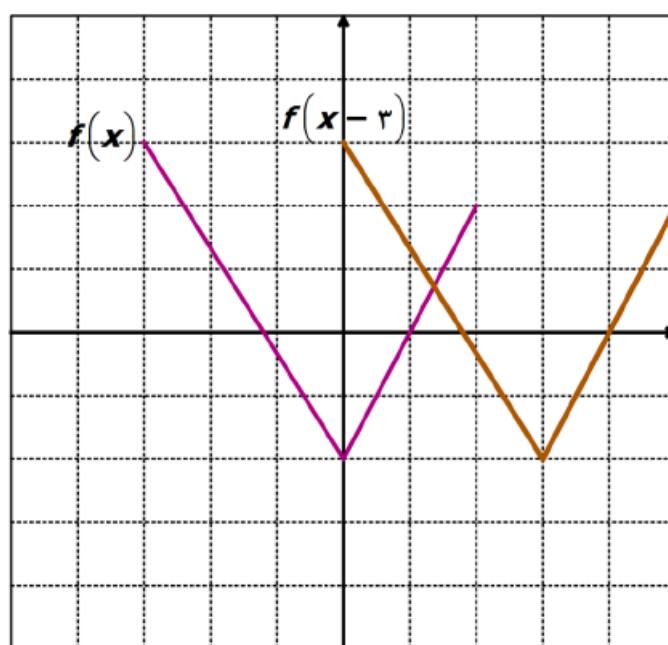
ب $f(x) - 2$

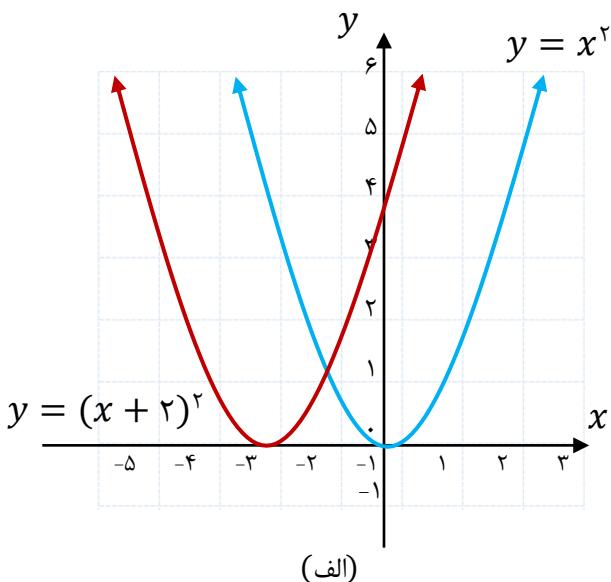
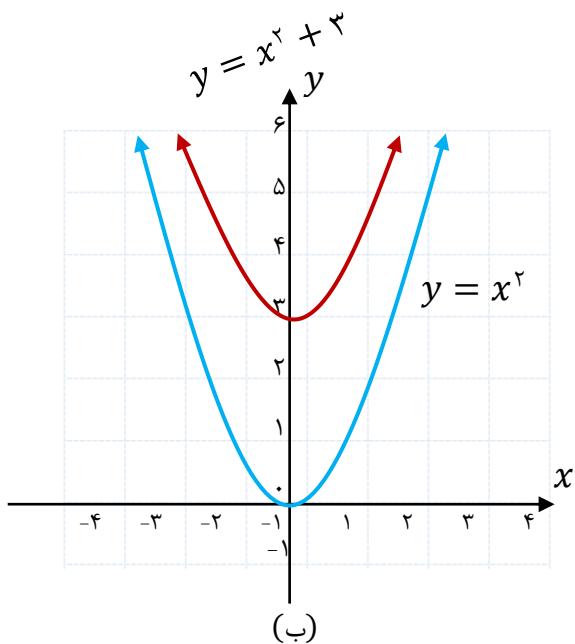


الف) $f(x + ۲)$



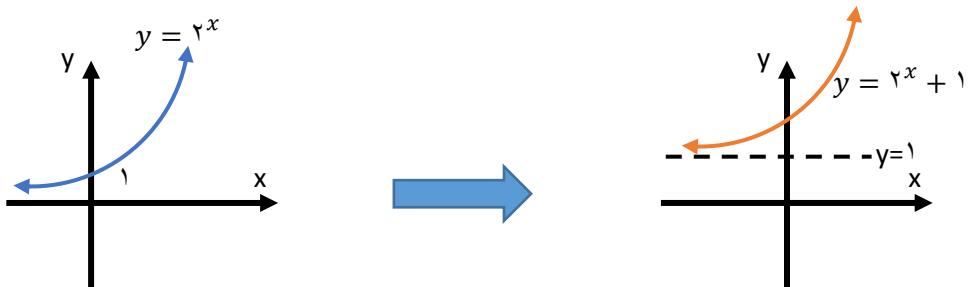
ب) $f(x - ۲)$





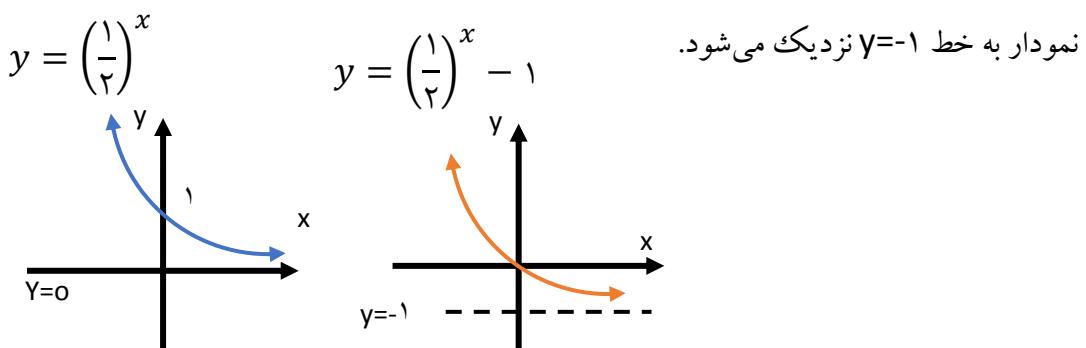
مثال: برای رسم نمودار $y = 2^x + 1$ کافی است نمودار $y = 2^x$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا جابه‌جا کنیم (در این جابه‌جایی، محور x ‌ها نیز یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌شود).

جا کنیم (در این جابه‌جایی، محور x ‌ها نیز یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌شود).



مثال: برای رسم نمودار $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ باید نمودار $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین منتقل داده می‌شود و

انتقال دهیم. در این انتقال خط $y=0$ (محور x ‌ها) نیز به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین منتقل داده می‌شود و



توجه کنید که اگر نقطه‌ی $(0,1)$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به نقطه‌ی $(0,0)$ می‌رسد،

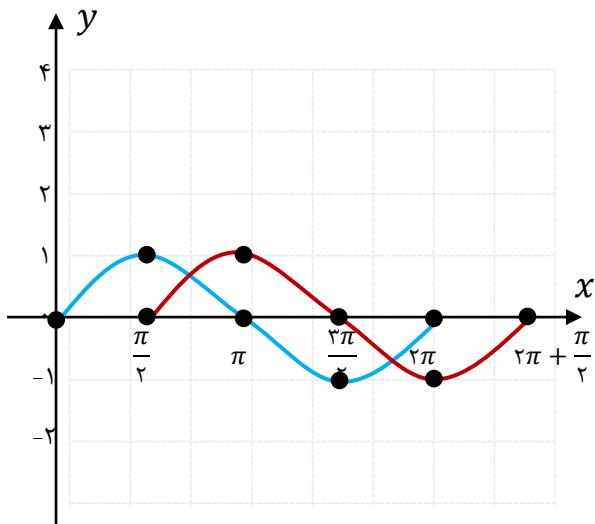
بنابراین نمودار از مبدأ مختصات، یعنی نقطه‌ی $(0,0)$ می‌گذرد.

مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ و

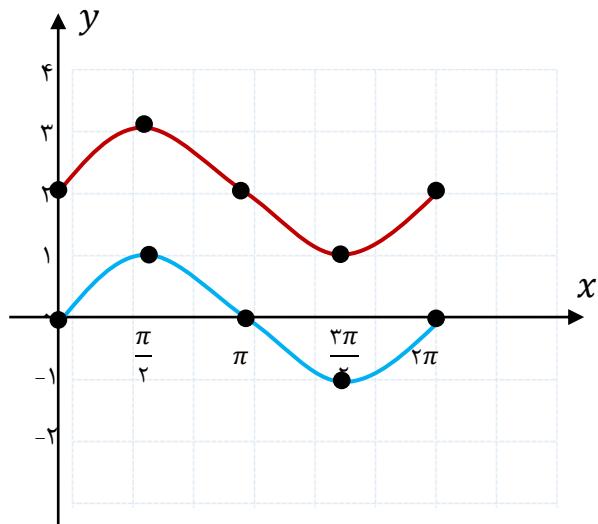
$y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع

$y = \sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست انتقال

دهیم، $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ رسم می‌شود. (شکل ب)

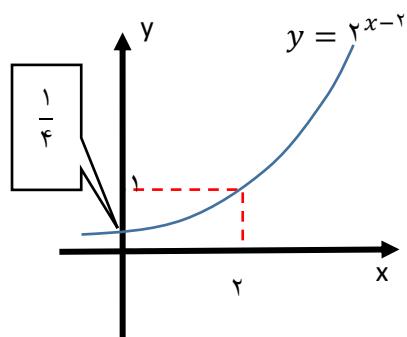
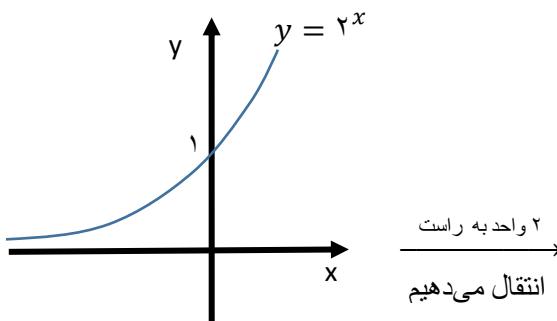


(ب)

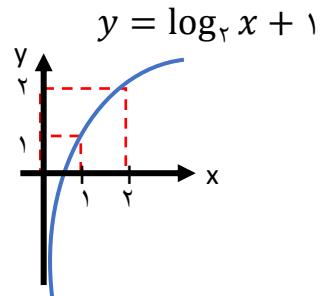
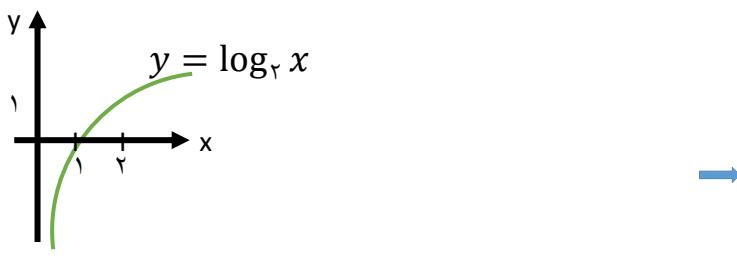


(الف)

مثال: برای رسم نمودار $y = 2^{x-2}$ را به اندازه‌ی دو واحد به سمت راست انتقال دهیم.

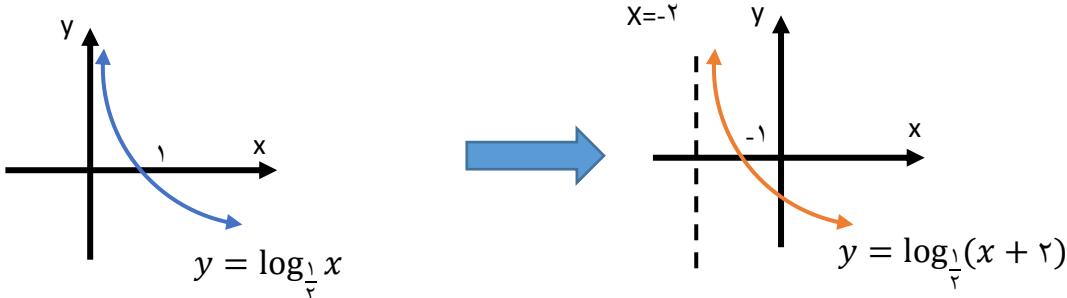


مثال: برای رسم نمودار تابع $y = \log_2 x + 1$ کافیست نمودار $y = \log_2 x$ را به اندازه‌ی ۱ واحد به بالا انتقال دهیم.



مثال: نمودار تابع $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ را رسم کنید.

برای رسم نمودار $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ کافی است نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم (در این انتقال، خط $x=0$ (محور y‌ها) نیز دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند).



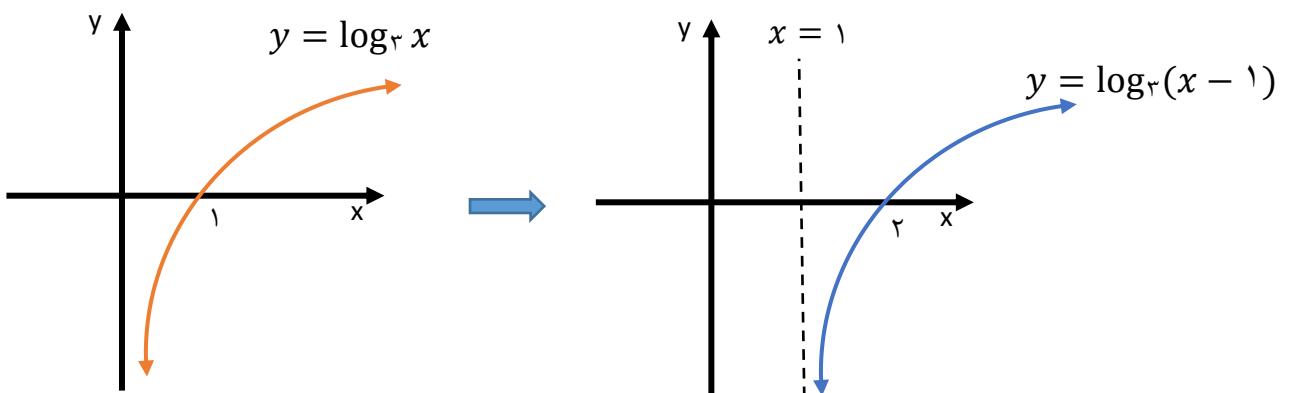
مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

(الف) $y = \log_2(x - 1)$

حل) اگر نمودار $y = \log_2 x$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y =$

$\log_2(x - 1)$ به دست می‌آید (در این انتقال خط $x=0$ (محور y‌ها) نیز به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست

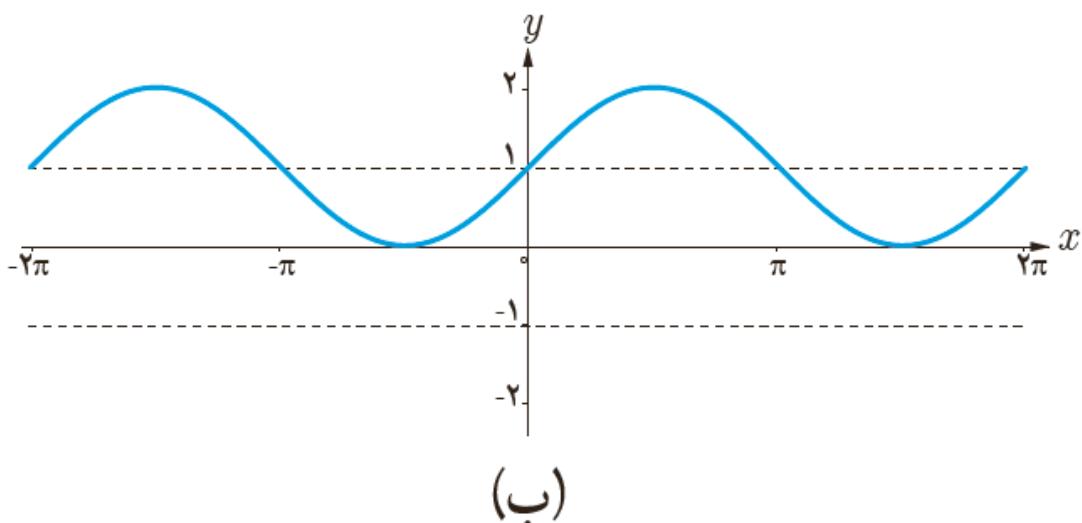
انتقال پیدا می‌کند).



$$(b) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم.

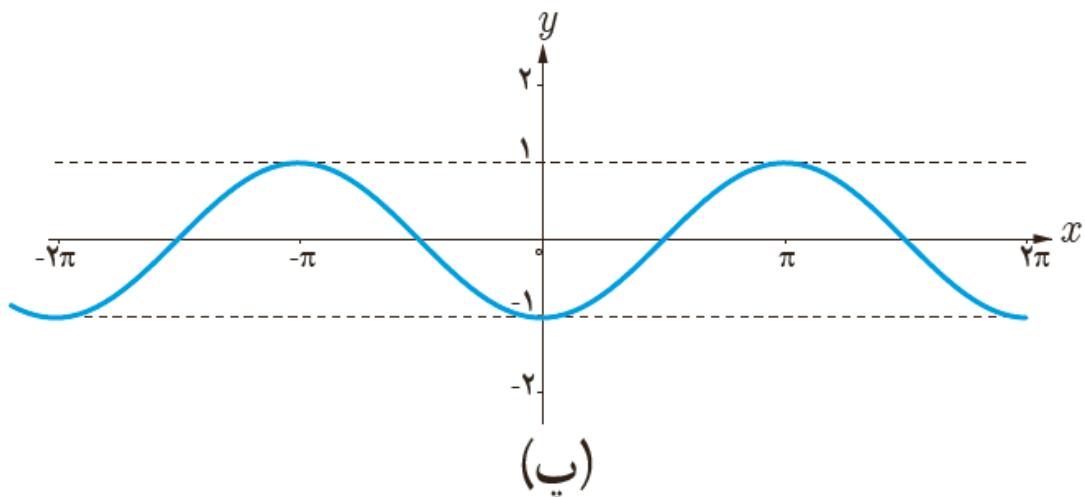
به این ترتیب شکل مقابله حاصل می‌شود.



(پ) $y = \sin x + 1$

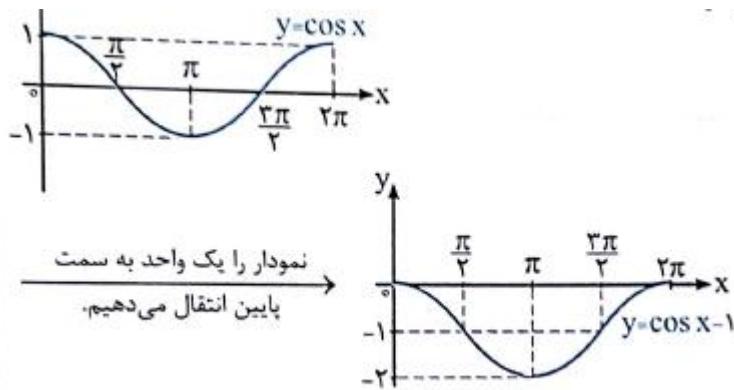
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم.

به این ترتیب شکل مقابل حاصل می‌شود.



(ت) $y = \cos x - 1$

حل) نمودار $y = \cos x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم آن گاه نمودار $y = \cos x - 1$ به دست می‌آید.

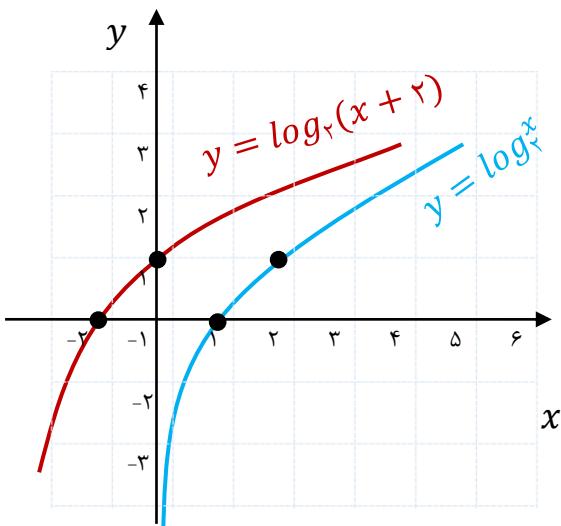
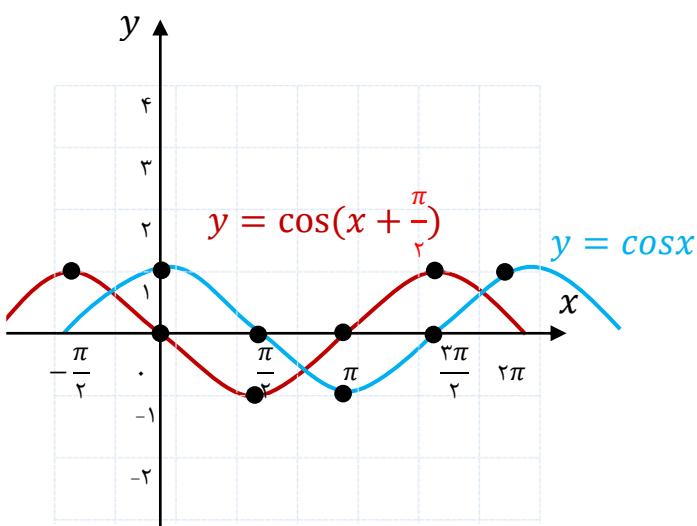


مثال: در زیر، نمودار توابع $y = \log_2(x + 2)$ و $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y = \cos x$ و

$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.

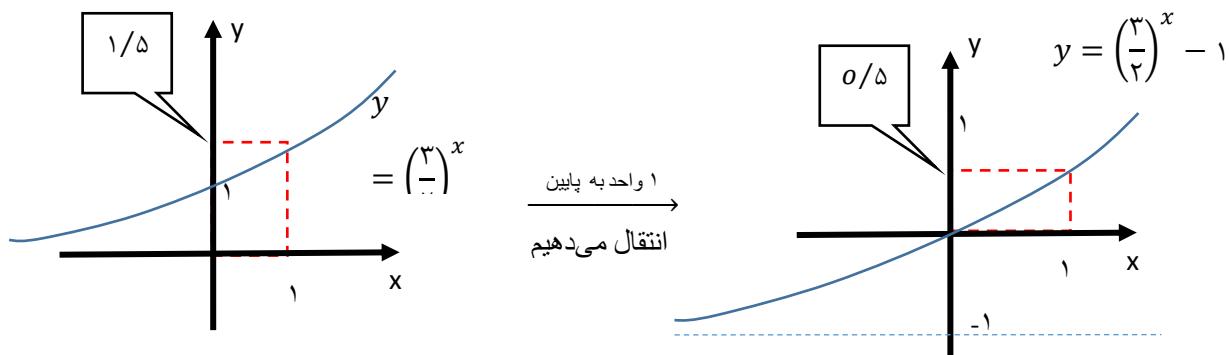
رسم: با انتقال $\frac{\pi}{2}$ در راستای افقی به طرف چپ

رسم: با انتقال ۲ واحد در راستای افقی به طرف چپ



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 \quad \text{الف)$$



$$y = 3^{x+\frac{1}{2}} \quad \text{ب)}$$

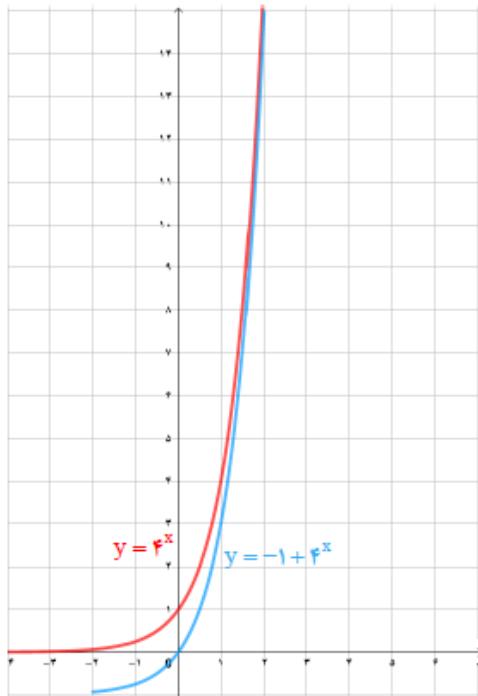


مثال: نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 2$ را در بازه $[2, -2]$ رسم کنید.

برای رسم از انتقال استفاده می‌کنیم کافی است نمودار $y = 4^x$ را یک واحد روی محور عرض‌ها به سمت

پایین انتقال دهیم. و بعد در بازه $[2, -2]$ آن را رسم کنیم

به این ترتیب داریم؛



نکته: اگر تاثیر هم روی طول ها داشتیم و هم روی عرض ها فرقی ندارد اول تاثیر روی طول را انجام دهیم

یا اول تاثیر روی عرض

مثال: نمودار تابع $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ را با توجه به نمودار $y = \cos x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

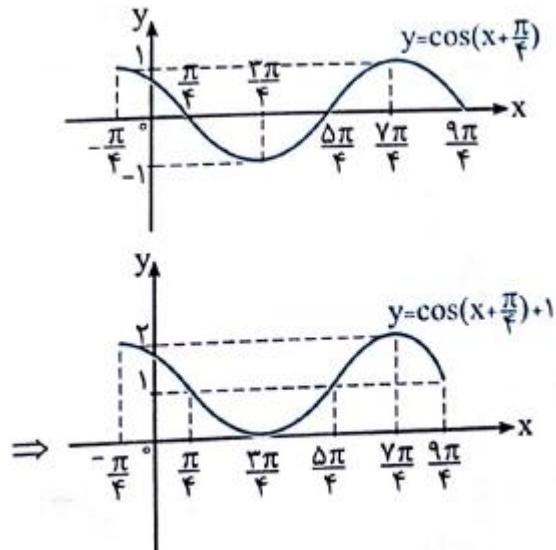
با توجه به نکته بالا هیچ فرقی نمی کند اول نمودار را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ انتقال دهیم (تاثیر روی طول) سپس

نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم (تاثیر روی عرض) یا اول نمودار را یک واحد به سمت

بالا انتقال دهیم (تاثیر روی عرض) سپس نمودار حاصل را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ انتقال دهیم (تاثیر روی طول)

حل) ابتدا نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ و سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا انتقال

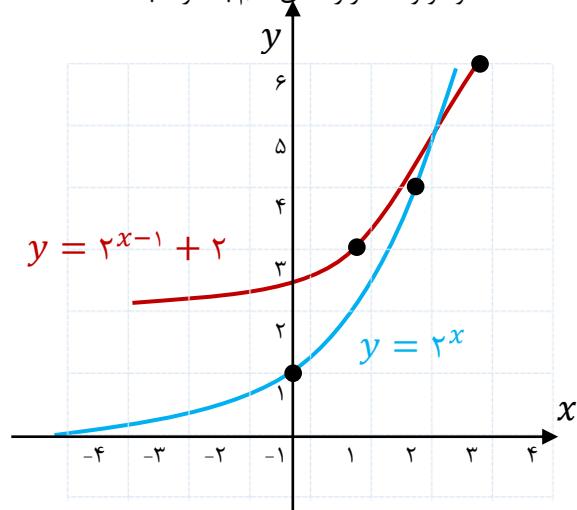
می دهیم تا نمودار $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ به دست آید:



مثال: نمودار تابع $y = 2^{x-1} + 2$ را با توجه به نمودار $y = 2^x$ در صفحه مختصات رسم کنید..

رسم: با انتقال یک واحد در راستای افقی به طرف راست

و دو واحد در راستای قائم به طرف بالا



مثال: نمودار تابع $y = \log_3 x$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا

نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g محور x را با چه طولی قطع می‌کند؟

$$y = \log_3 x \xrightarrow{\text{انتقال به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست}} y = \log_3(x - 2) \quad (\text{حل})$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت پایین}} g(x) = \log_3(x - 2) - 2$$

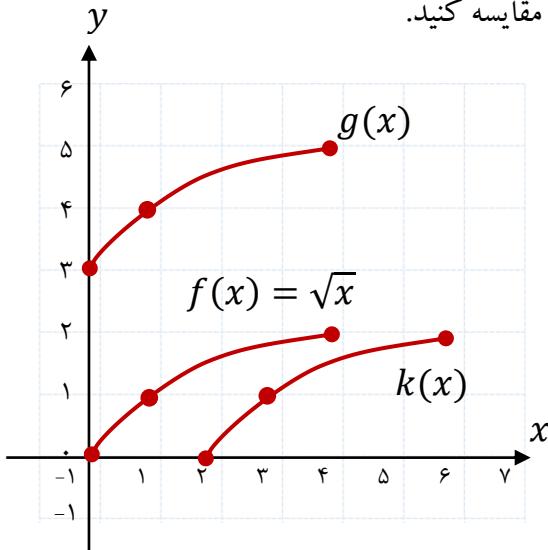
با حل معادله $\log_3(x - 2) - 2 = 0$ طول نقطه‌ی تلاقی نمودار g با محور x را به دست می‌آید:

$$g(x) = 0 \rightarrow \log_3(x - 2) - 2 = 0 \rightarrow \log_3(x - 2) = 2 \rightarrow x - 2 = 3^2 = 9 \rightarrow x = 11$$

مثال: الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع $g(x) = f(x) + 3$ و $k(x) = f(x - 2)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.



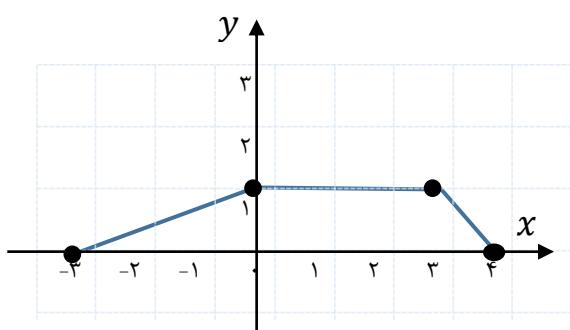
	$f(x) = \sqrt{x}$	$K(x) = f(x - 2)$	$g(x) = f(x) + 3$
دامنه	$[0, 4]$	$[2, 6]$	$[0, 4]$
برد	$[0, 2]$	$[0, 2]$	$[3, 5]$

ج) بازه‌ی دامنه‌ی تابع k از انتقال بازه‌ی دامنه‌ی f در راستای افقی به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع k همان برد تابع f می‌باشد.

بازه‌ی دامنه‌ی g همان بازه‌ی دامنه‌ی تابع f است و بازه‌ی برد تابع g از انتقال ۳ واحد برد f در راستای قائم و به سمت بالا به دست می‌آید.

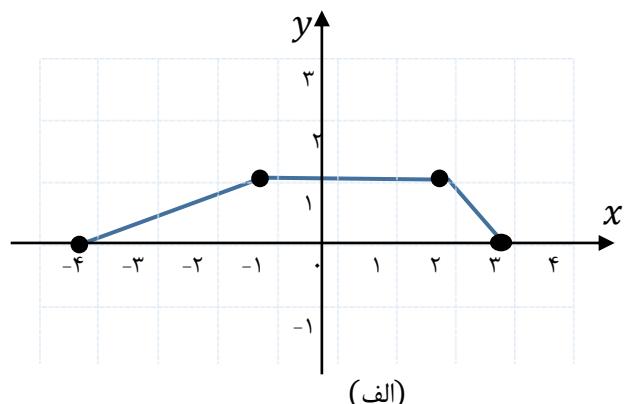
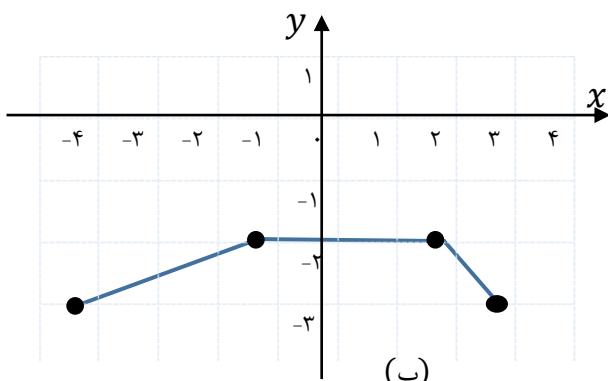
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع

$y = f(x + 1) - 3$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x + 1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x + 1) - 3$ رسم شود (شکل ب).

رسم شود (شکل ب).



ب) انبساط و انقباض طولی و عرضی (در این حالت عددی در x یا $f(x)$ ضرب یا تقسیم می شود)

انبساط و انقباض طولی (افقی)

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ کافی است طول تمام نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: تاثیر بر روی طول ها معکوس است یعنی ضرب به تقسیم تبدیل می شود و بالعکس

نکته: چون تاثیر بر روی طول ها معکوس است اگر $0 < k < 1$ باشد انبساط داریم و اگر $k > 1$ باشد انقباض داریم.

$k = -1$

برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است طول تمام نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در

۱- ضرب کنیم. یعنی تمام x ها را قرینه کنیم به عبارت دیگر نمودار را نسبت به محور y هاقرینه می کنیم.

انبساط و انقباض عرضی (عمودی)

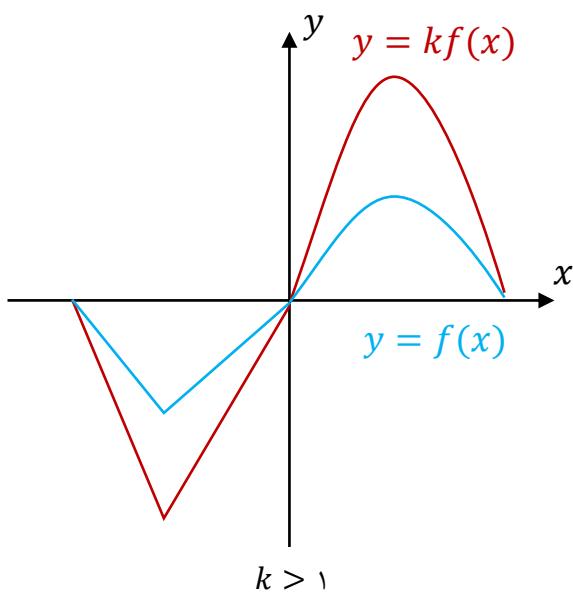
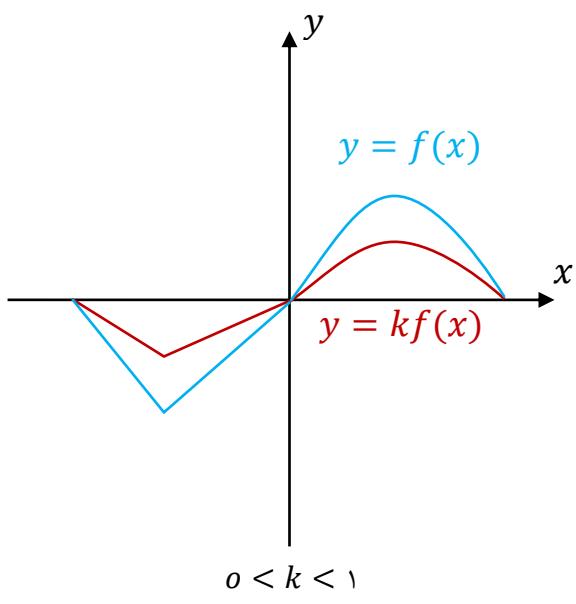
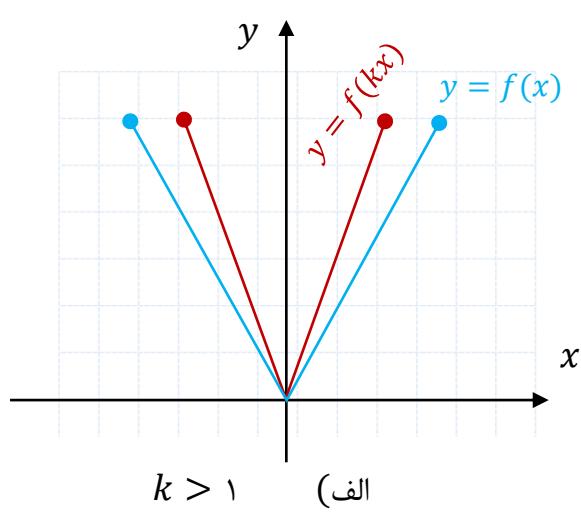
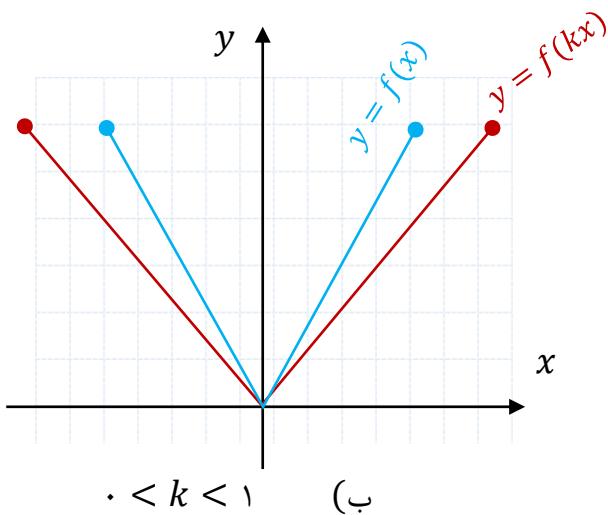
برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض تمام نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.

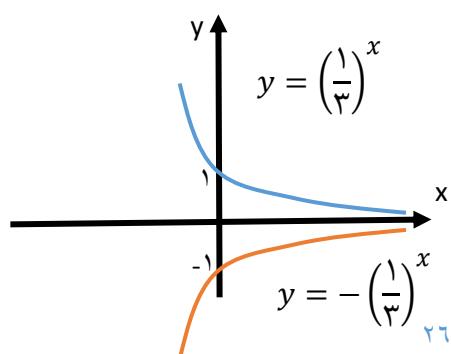
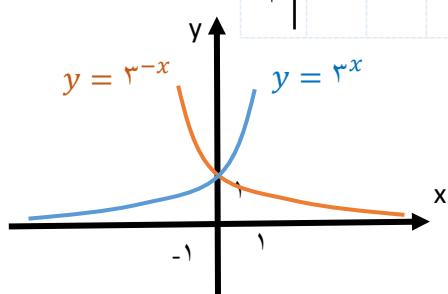
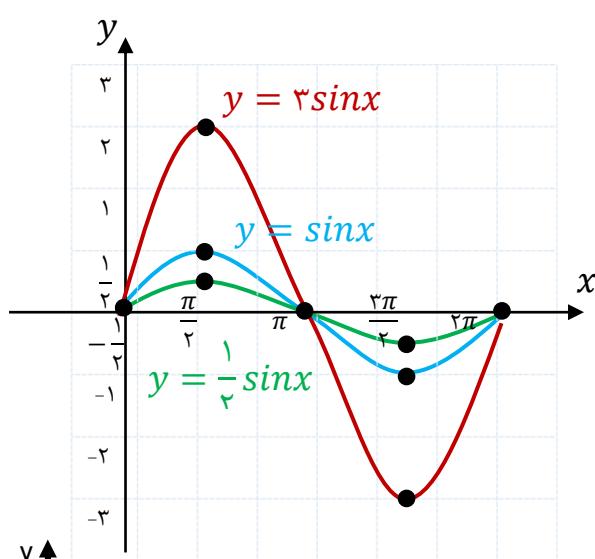
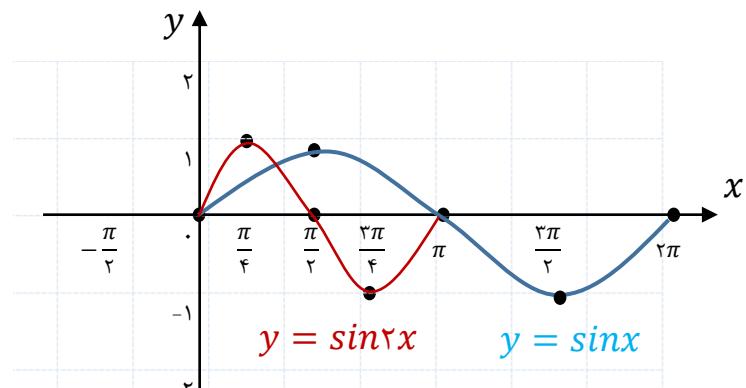
نکته: چون تاثیر بر روی عرض ها مستقیم است اگر $0 < k < 1$ باشد انقباض داریم و اگر $k > 1$ باشد انبساط داریم.

$k = -1$

برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است عرض تمام نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در ۱- ضرب کنیم. یعنی تمام y ها را قرینه کنیم به عبارت دیگر نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y=f(kx)$ برای دو حالت $k < 1$ و $k > 1$ رسم شده است.





تذکر : توجه شود که فرقی ندارد اول تا ثیر روی طول ها را انجام دهیم یا روی عرض ها را

نکته: چون تمام اعمال روی طول ها به صورت معکوس است در اولویت بندی محاسبات هم باید این قاعده را

رعایت کنیم یعنی اگر هم تاثیر جمعی(تفریقی) و هم ضربی (تقسیمی) روی طول ها داشتیم اول جمع و تفریق را

انجام دهیم بعد ضرب و تقسیم به عبارت دیگر در تابع $y = f(kx \pm a)$ (لیز روی طول ها ابتدا a را تاثیر می

دهیم(تاثیر معکوس) (بعد k را(تاثیر معکوس))

تذکر : اگر ابتدا تاثیر روی طول ها را انجام دادیم تا زمانیکه تاثیر روی طول ها تمام نشده به سراغ تاثیر روی عرض

ها نمی رویم

نکته: چون تمام اعمال روی عرض ها به صورت مستقیم است در اولویت بندی محاسبات هم باید این قاعده را

رعایت کنیم یعنی اگر هم تاثیر جمعی(تفریقی) و هم ضربی (تقسیمی) روی عرض ها داشتیم اول ضرب و تقسیم را

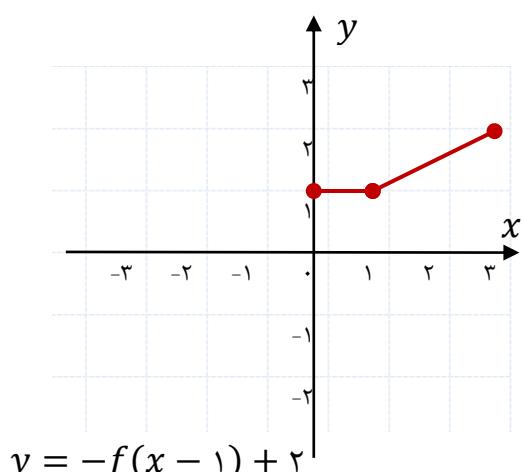
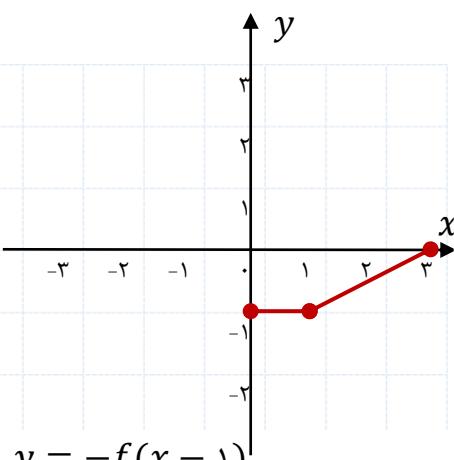
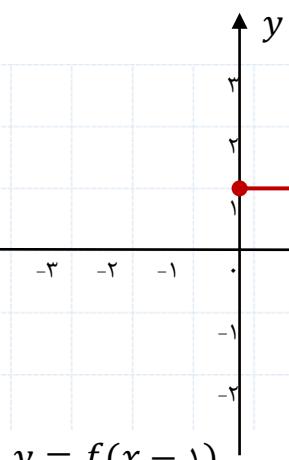
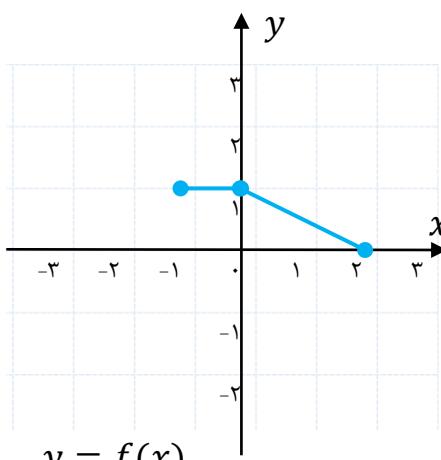
انجام دهیم بعد جمع و تفریق به عبارت دیگر در تابع $y = kf(x) \pm a$ (لیز روی عرض ها ابتدا k را تاثیر می

دهیم(تاثیر مستقیم) (بعد a را(تاثیر مستقیم))

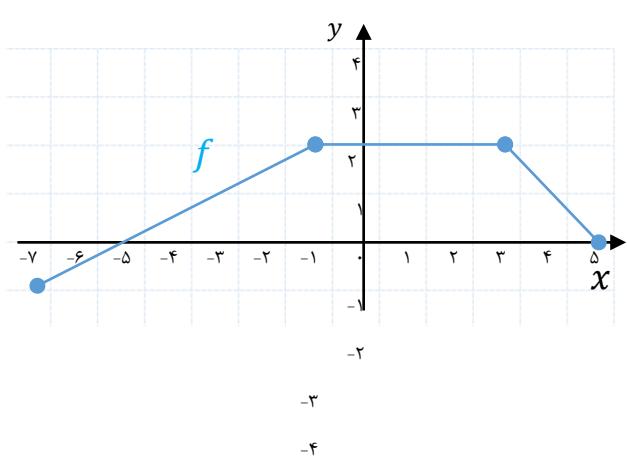
تذکر : اگر ابتدا تاثیر روی عرض ها را انجام دادیم تا زمانیکه تاثیر روی عرض ها تمام نشده به سراغ تاثیر روی طول

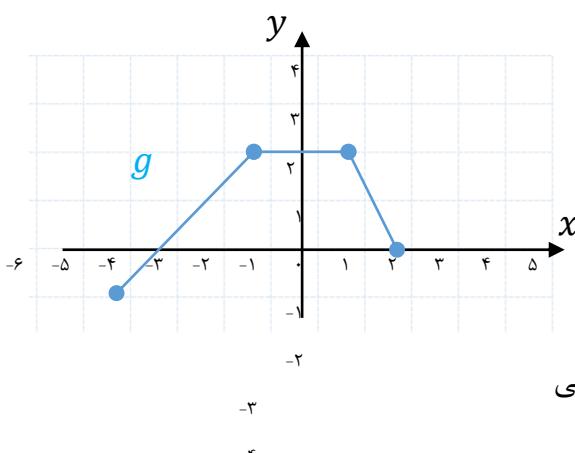
ها نمی رویم

مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y=-f(x-1)+2$ را رسم کنید.



مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.





حل) نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می-کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

دقت کنیم: ابتدا باید تاثیر جمعی را انجام داد سپس تاثیر ضربی

روش دوم

اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A' = \left(\frac{x_0-1}{2}, y_0\right)$ نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع g است

نکته: برای یافتن طول نقطهٔ A' از معکوس تابع $y = 2x + 1$ استفاده می-کنیم.

$$y = 2x + 1 \rightarrow y^{-1} = \frac{x-1}{2}$$

مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

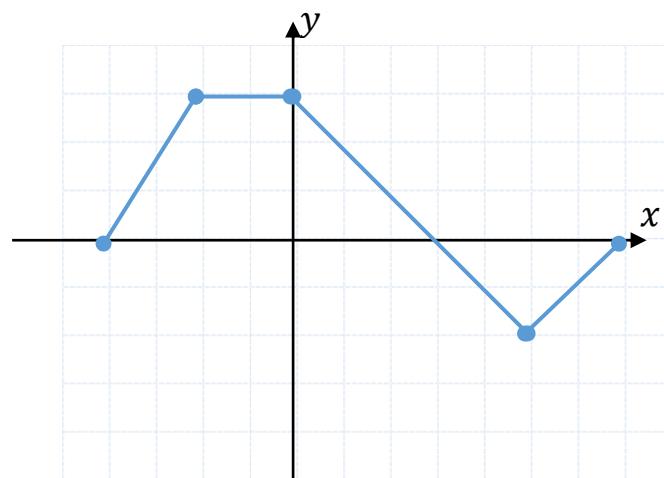
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = 2f(x-1)$

پ) $y = -f(x) + 2$

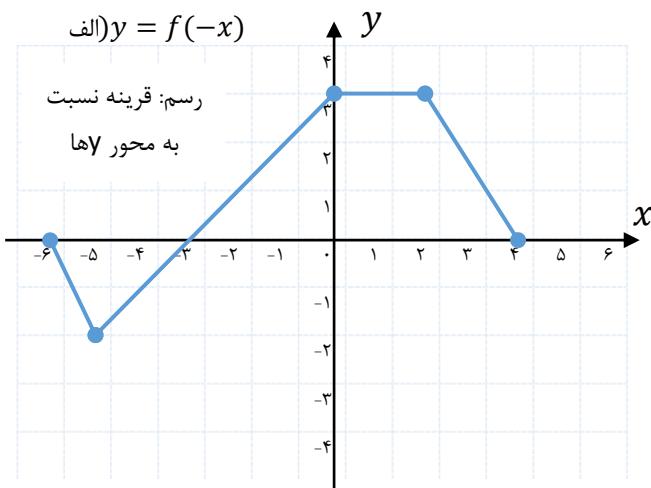
ت) $y = f(2x-1)$

ث) $y = f(3-x)$

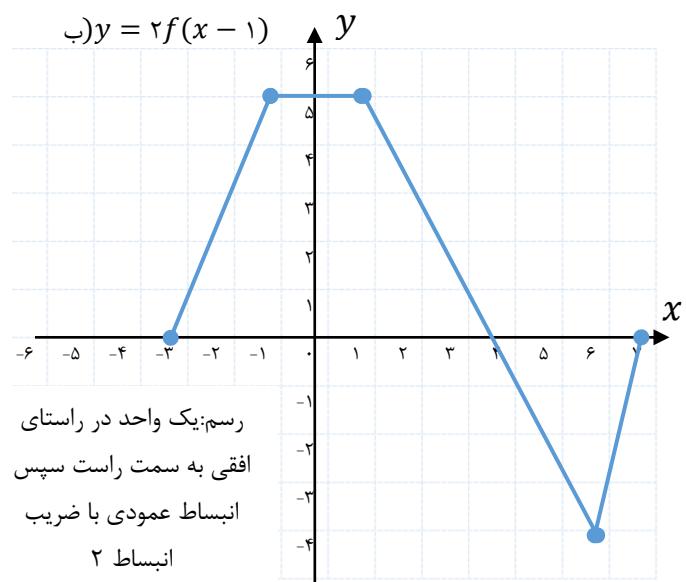


(حل)

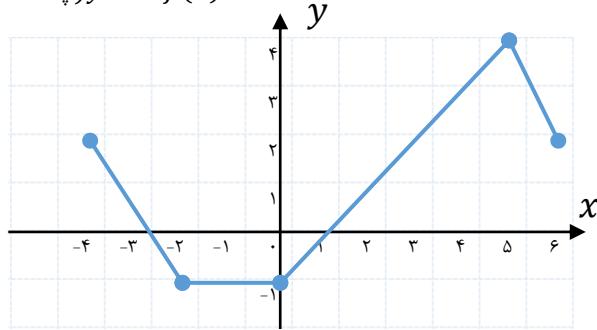
الف) $y = f(-x)$



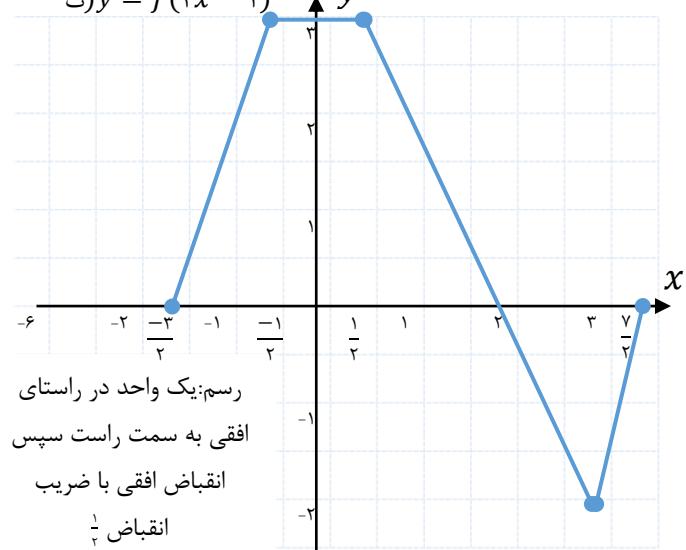
ب) $y = 2f(x - 1)$

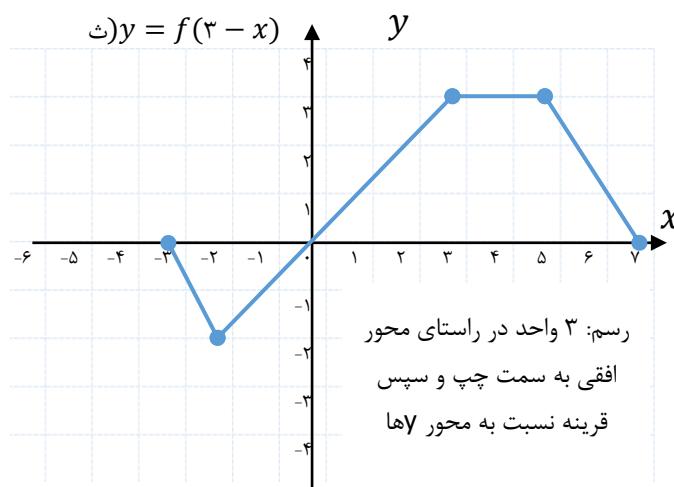


پ) $y = -f(x) + 2$



ت) $y = f(2x - 1)$





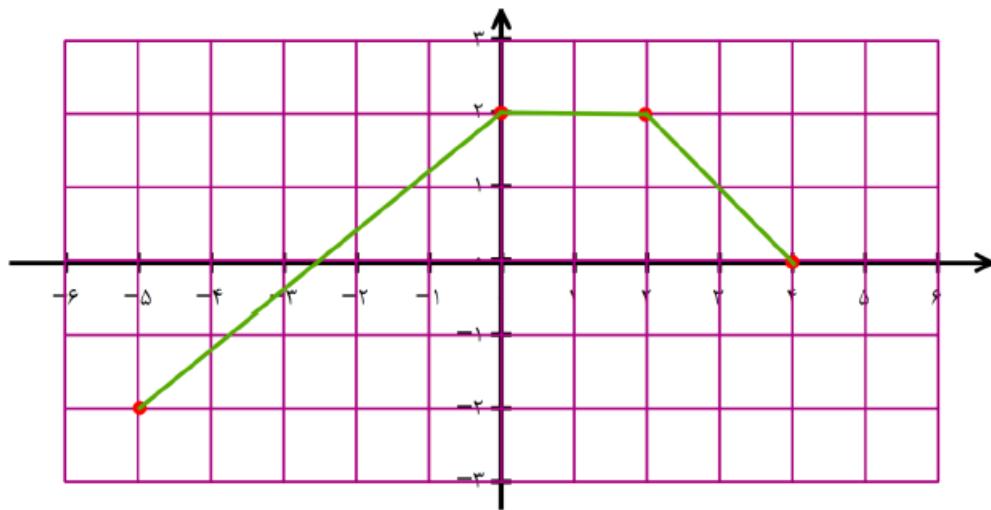
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

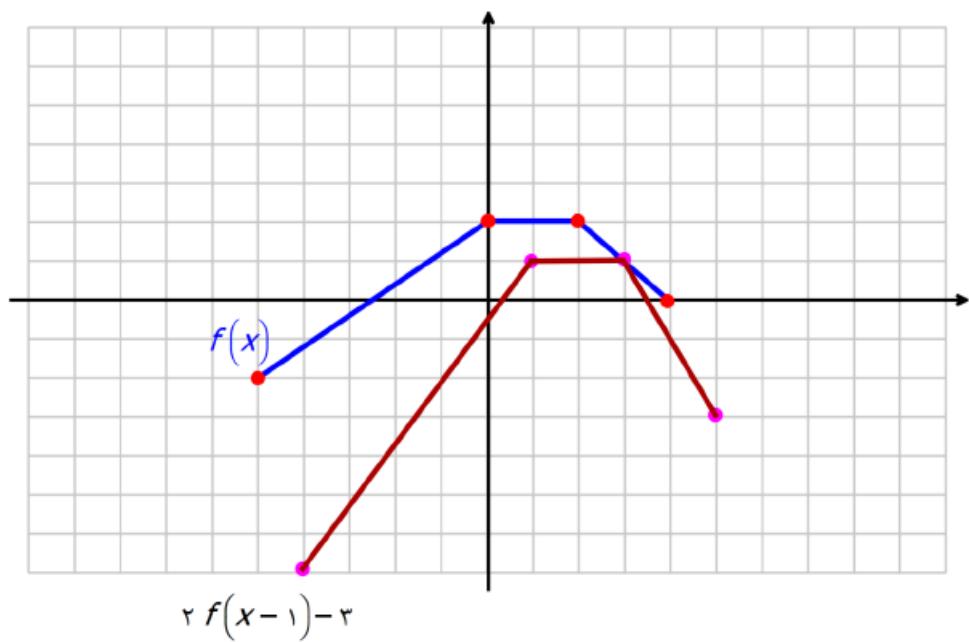
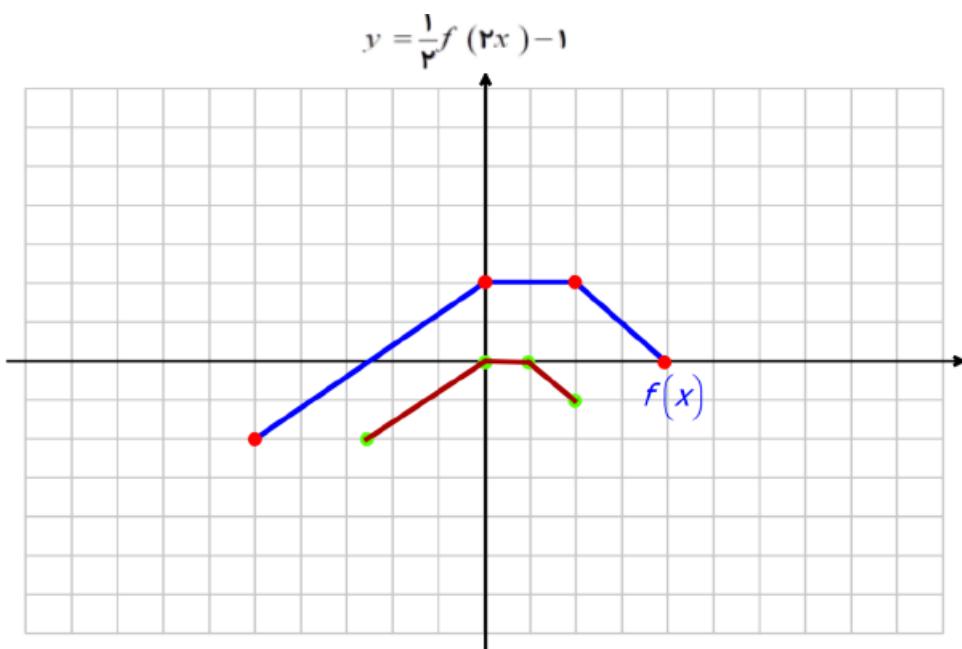
(الف) $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$

(ب) $y = 2f(x - 1) - 3$

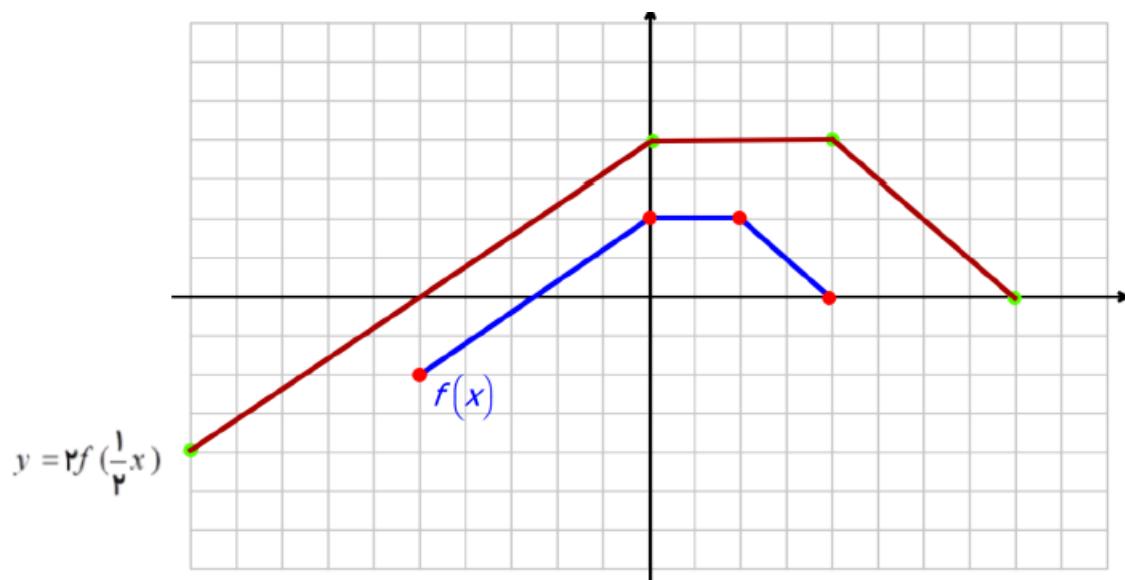
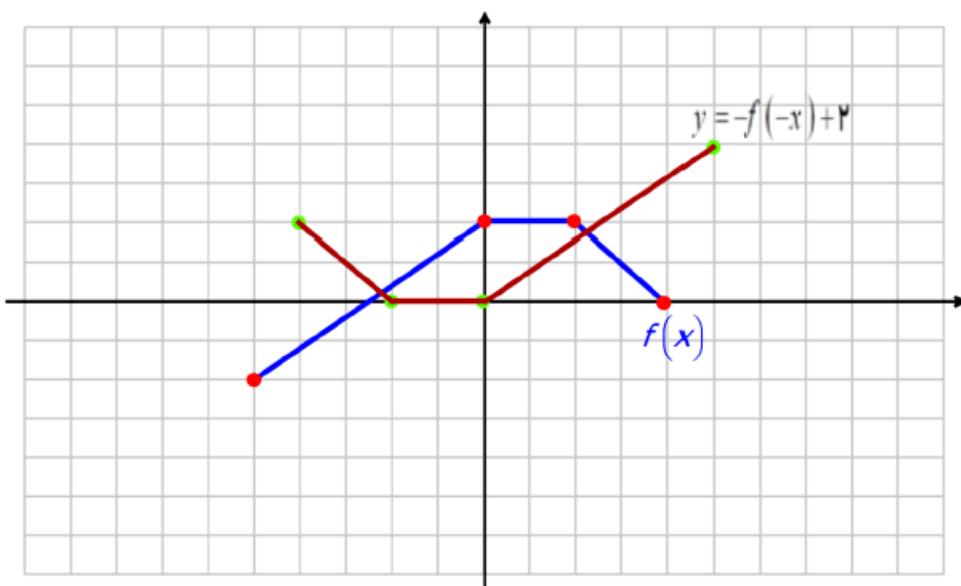
(پ) $y = -f(-x) + 2$

(ت) $y = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$





$$y = -f(-x) + 1$$

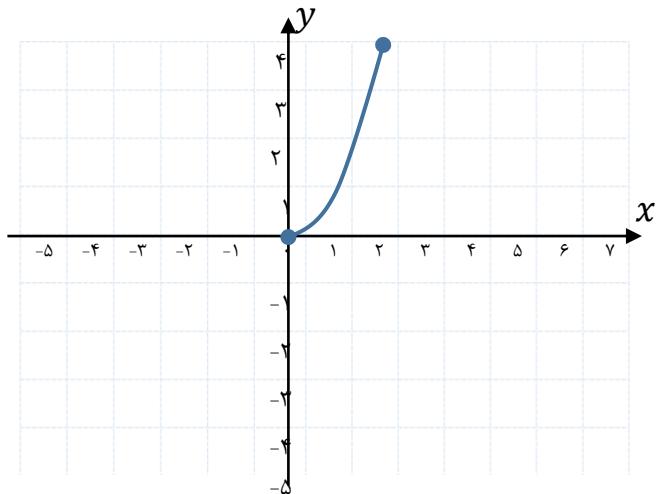


مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

(الف) $y = f(-x)$

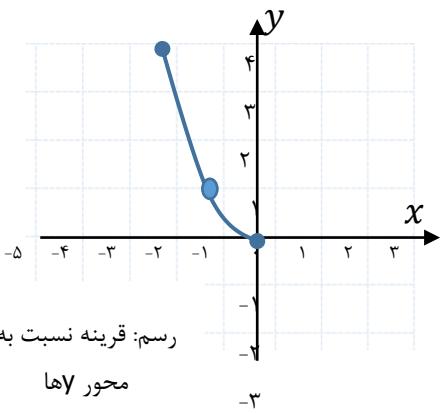
(ب) $y = -f(x)$

(پ) $y = -f(-x)$



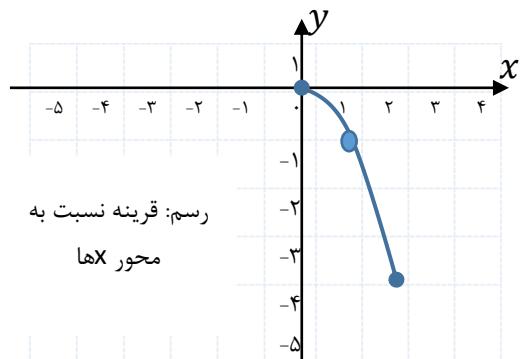
(حل)

(الف) $y = f(-x)$



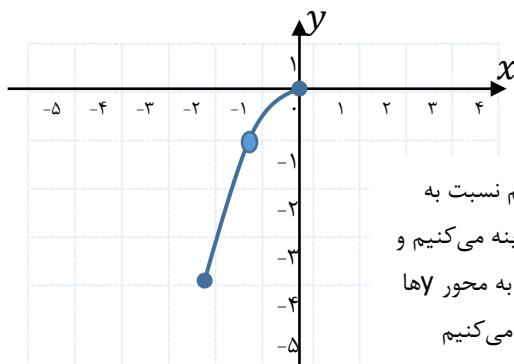
رسم: قرینه نسبت به
محور X ها

(ب) $y = -f(x)$



رسم: قرینه نسبت به
محور Y ها

(پ) $y = -f(-x)$

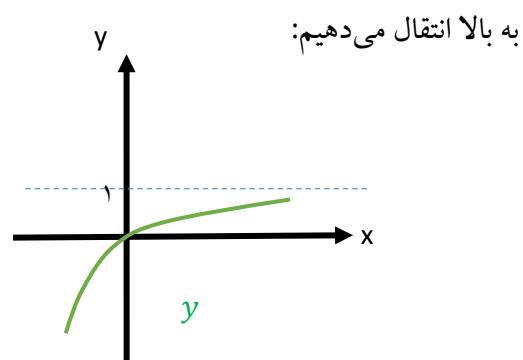
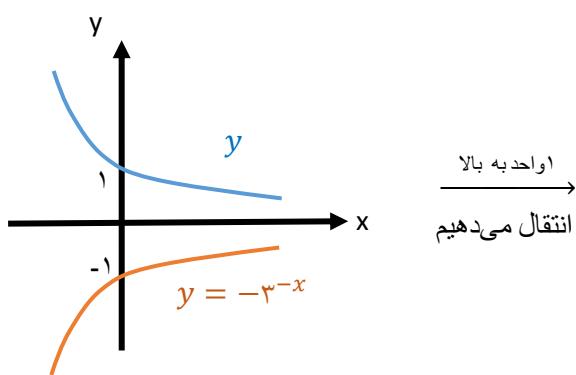


رسم: هم نسبت به
محور X ها قرینه می کنیم و
هم نسبت به محور Y ها
قرینه می کنیم

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

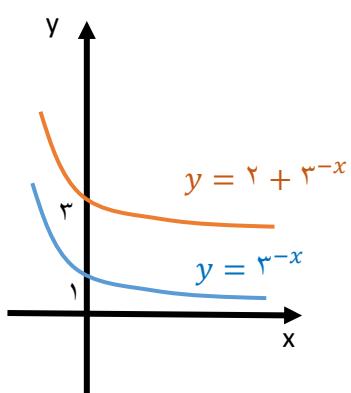
$$\text{الف) } y = 2 - 3^{-x}$$

حل) نمودار $y = 3^x$ را یک بار نسبت به محور z ها و سپس نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم، و در نهایت ۲ واحد



$$\text{ب) } y = 2 + 3^{-x}$$

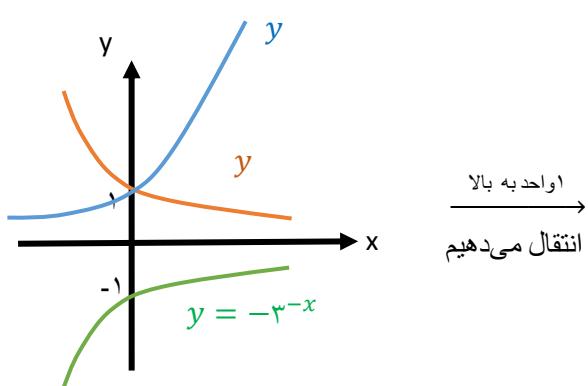
حل) نمودار $y = 3^x$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



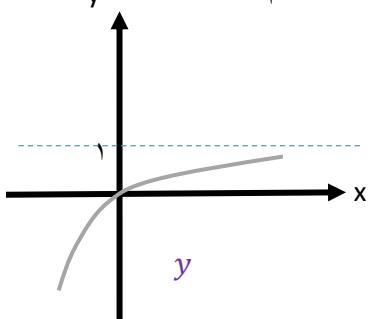
$$\text{ث) } y = 1 - 3^{-x}$$

نمودار $y = 3^x$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا $y = 3^{-x}$ به دست آید.

نمودار $y = 3^{-x}$ را نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم تا $-y = 3^{-x}$ به دست آید این نمودار را یک واحد به



بالا انتقال می‌دهیم تا $y = 1 - 3^{-x}$ به دست آید

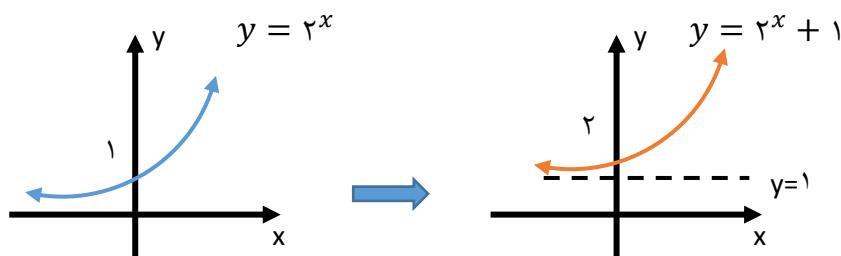


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

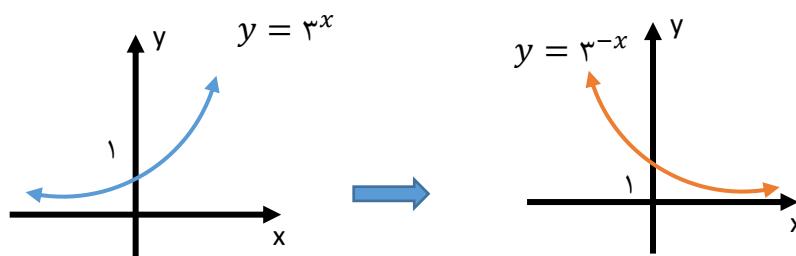
$$y = 1 - 10^{x+1} \quad \text{پ) } \quad y = 2 \times 3^{-x} - 1 \quad \text{ب) } \quad y = 2^x + 1 \quad \text{ت)$$

حل) آ) اگر نمودار $y = 2^x$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = 2^x + 1$ به دست می‌آید.

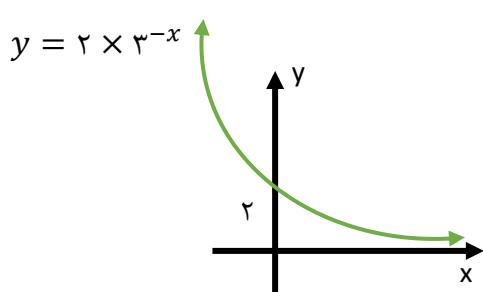
(در این انتقال خط $y=0$ (محور Xها) به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا انتقال پیدا می‌کند).



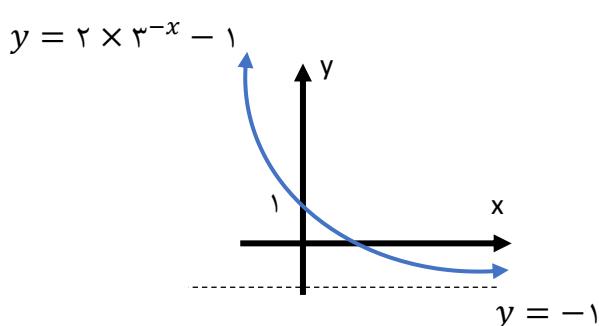
ب) ابتدا نمودار $y = 3^x$ را با قرینه کردن نمودار $y = 3^{-x}$ نسبت به محور Yها به دست می‌آوریم:



با دو برابر کردن عرض نقاط نمودار $y = 3^{-x}$



نمودار $y = 2 \times 3^{-x}$ رسم می‌شود:

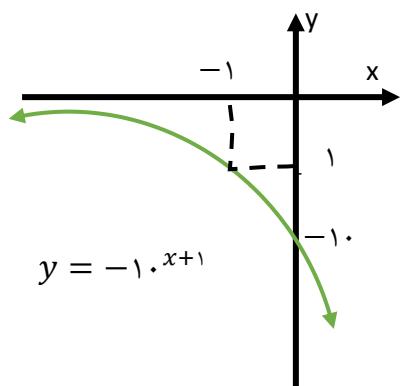


نمودار $y = 2 \times 3^{-x} - 1$ را یک واحد به سمت

پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار

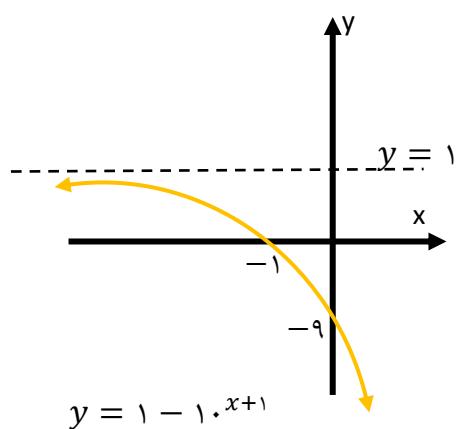
$y = 2 \times 3^{-x} - 1$ به دست آید:

پ) ابتدا نمودار $y = 10^{x+1}$ را با انتقال نمودار $y = 10^x$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم:



با قرینه کردن نمودار $y = 10^{x+1}$ نسبت

به محور Xها نمودار $y = 10^{x+1}$ به دست می‌آید:



اگر نمودار $y = -10^{x+1}$ را به اندازه‌ی

یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم

نمودار $y = 1 - 10^{x+1}$ به دست می‌آید:

مثال: نمودار تابع $f(x) = 3^x$ را ابتدا نسبت به محور Yها قرینه می‌کنیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم و در

نهایت نمودار را به اندازه‌ی ۵ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x)$ به دست آید. مقدار $g(-2)$ را به-

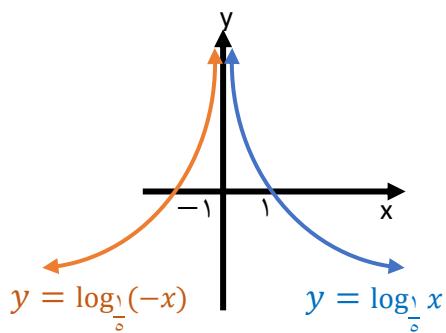
دست آورید.

حل: اگر نمودار تابع $y = 3^x$ را نسبت به محور Yها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = 3^{-x}$ به دست می‌آید. با دو برابر کردن

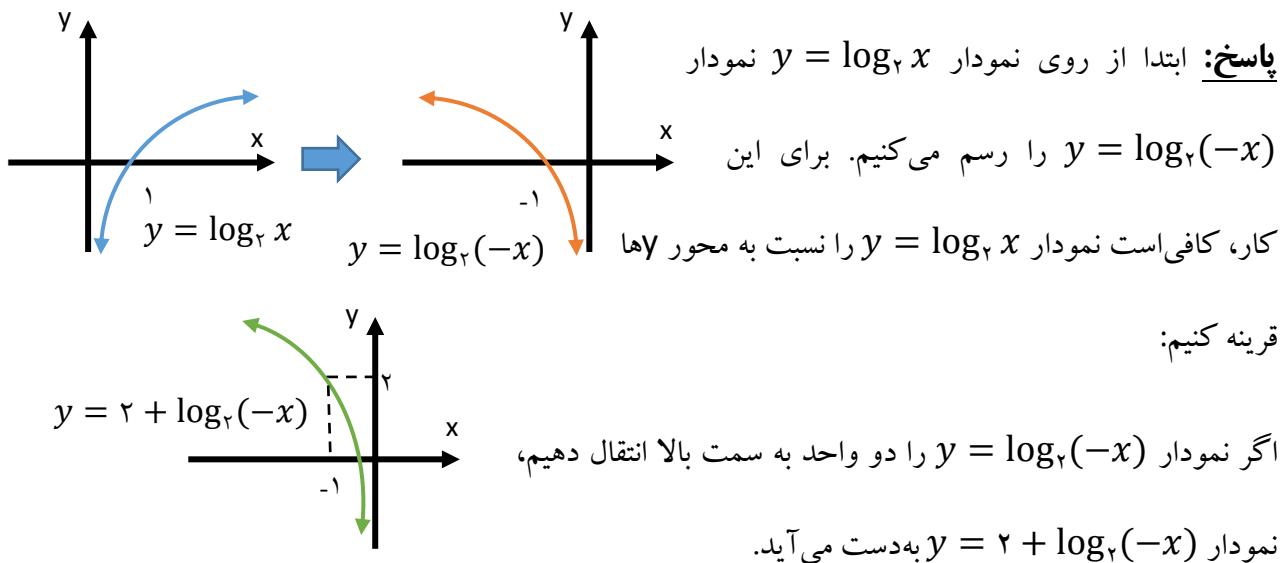
عرض نقاط نمودار $y = 3^{-x}$ نمودار تابع $y = 2 \times 3^{-x}$ و با انتقال نمودار $y = 2 \times 3^{-x}$ به اندازه‌ی ۵ واحد به سمت بالا،

نمودار تابع $g(x) = 2 \times 3^{-x} + 5$ به دست می‌آید. داریم:

مثال: با قرینه کردن نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ نسبت به محور y ها نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}}x$ به دست می‌آید.



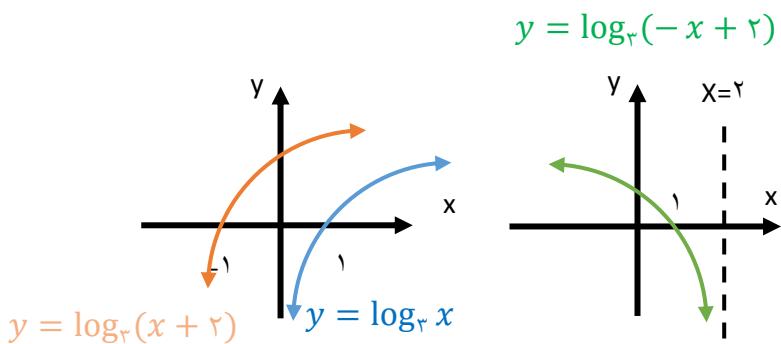
مثال: نمودار $y = 2 + \log_2(-x)$ را رسم کنید.



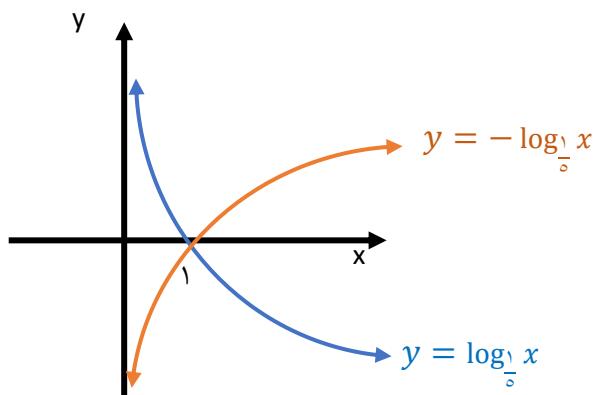
مثال: نمودار $y = \log_r(-x + 2)$ را رسم کنید.

ابتدا نمودار x را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می کنیم سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

(توجه کنید که در انتقال ۲ واحد به سمت راست، خط $x=0$ نیز باید ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کند.)



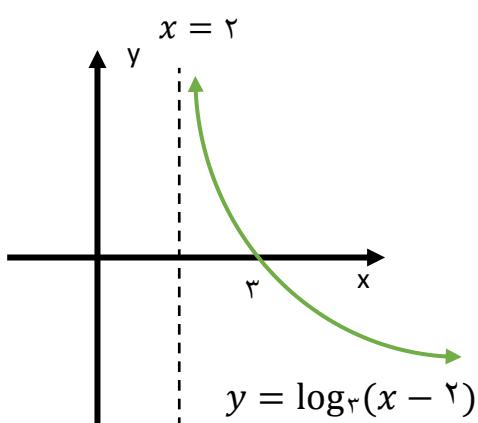
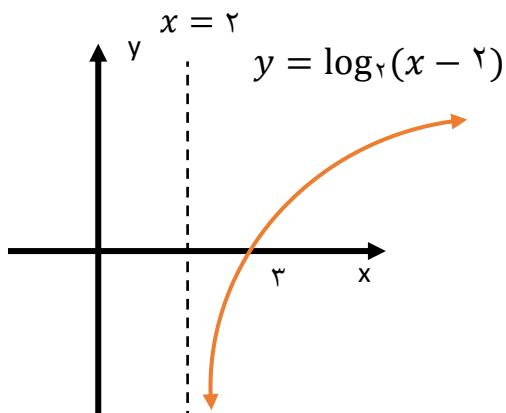
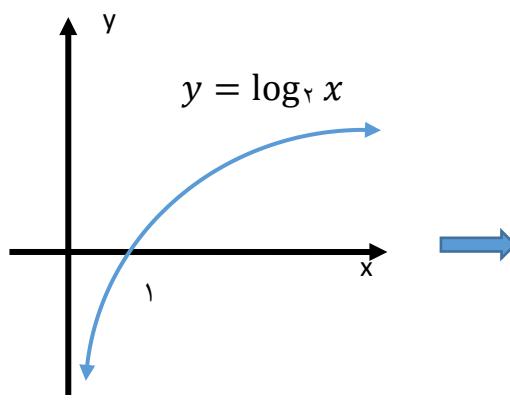
مثال: با قرینه کردن نمودار x را $y = \log_{\frac{1}{r}}(-x)$ نسبت به محور y ها نمودار $y = \log_{\frac{1}{r}} x$ به دست می آید:



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$(الف) y = 1 - \log_2(-x) \quad (ب) y = 2 - \log_2(x - 2)$$

الف) با انتقال نمودار $y = \log_2 x$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست، نمودار $y = \log_2(x - 2)$ به دست می‌آید.



$$y = \log_2(x - 2)$$

$$y = -\log_2(x - 2)$$

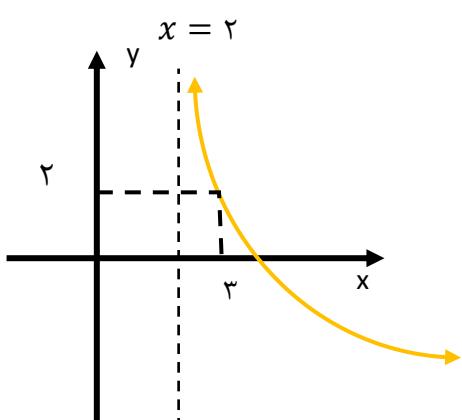
به دست می‌آید:

اگر نمودار $y = -\log_2(x - 2)$ را به

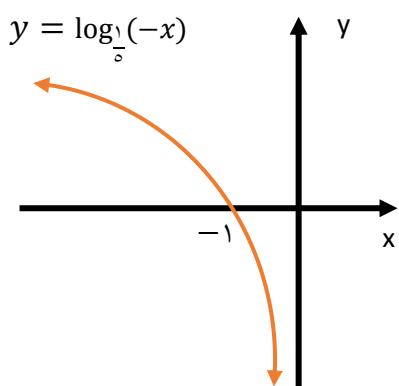
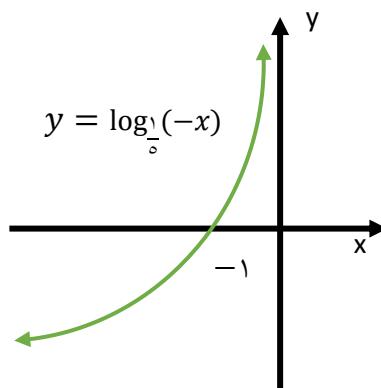
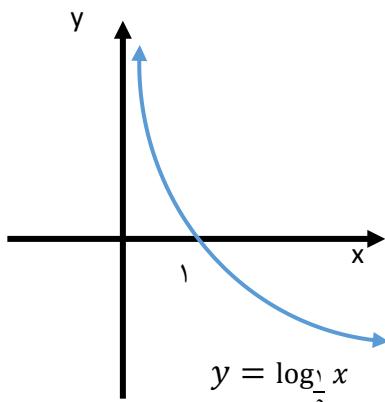
اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم،

نمودار $y = 2 - \log_2(x - 2)$ رسم

می‌شود.

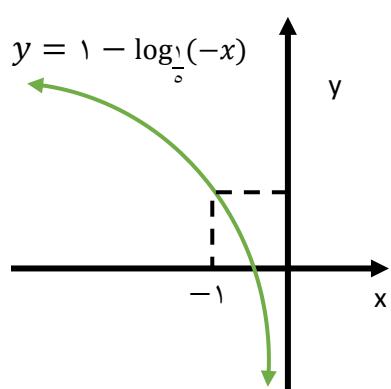


ب) با قرینه کردن نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ نسبت به محور y ها نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}}x$ به دست می‌آید:



اگر نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ رسم می‌شود:

با انتقال به اندازه‌ی یک واحد به

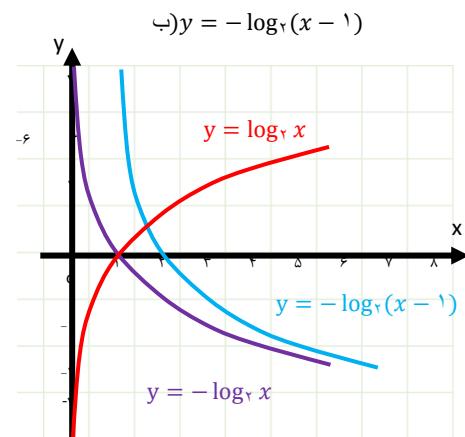
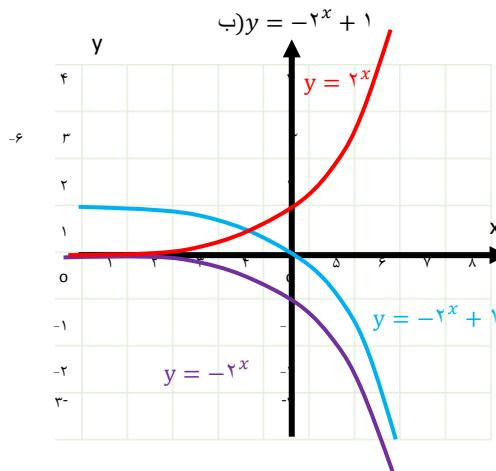


سمت بالا، نمودار $y = 1 - \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ به دست می‌آید:

به دست می‌آید:

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طولها رسم می شود

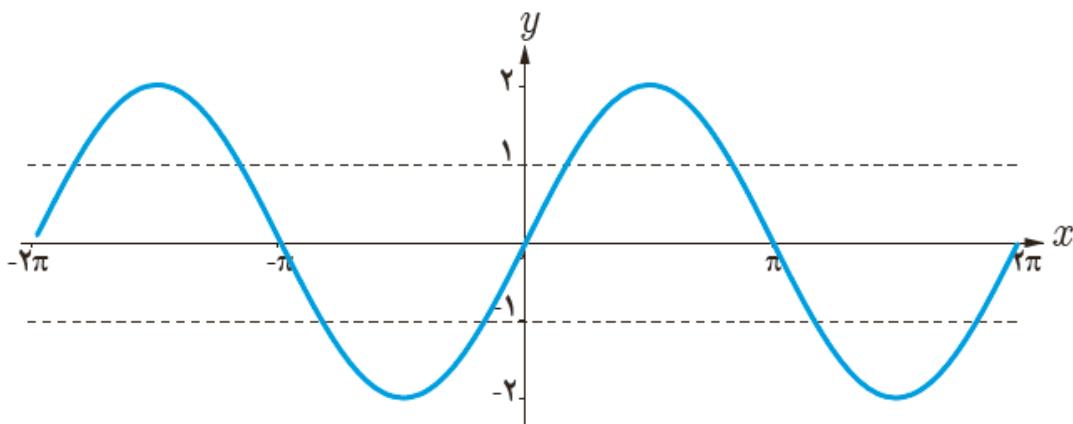


مثال: هر یک از توابع با ضابطه های داده شده دارای کدام نمودار است؟

(الف) $y = 2 \sin x$

کافی است عرض نقاط نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار حاصل در بازه $[-2\pi, 2\pi]$

به دست می آید.

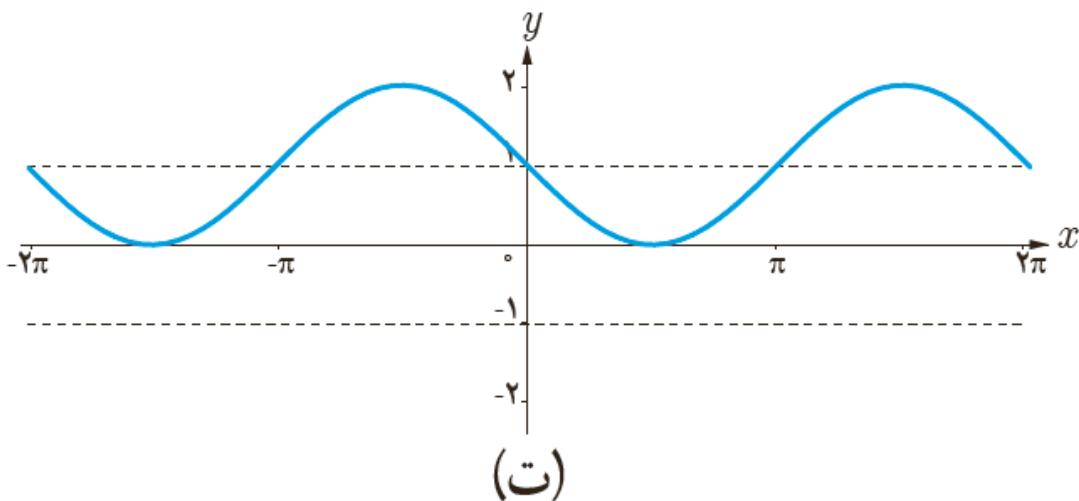


(الف)

(ت) $y = -\sin x + 1$

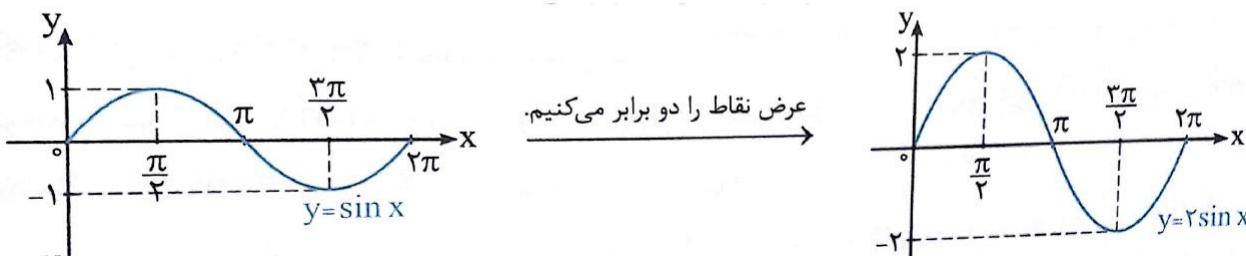
برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = -\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور X ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می‌آید.

بنابراین نمودار $y = -\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:

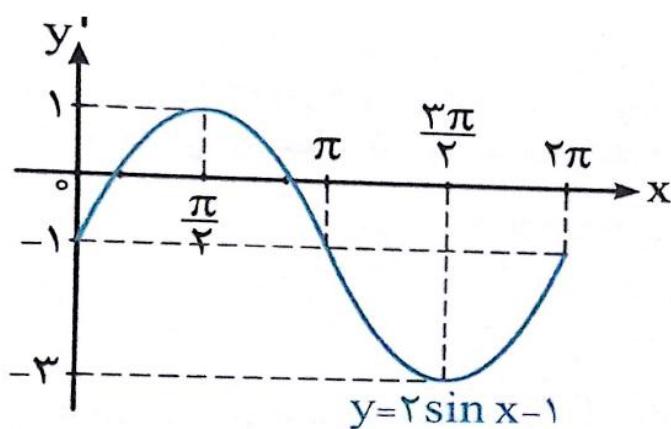


مثال: نمودار تابع $y = 2\sin x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: برای سرمه نمودار تابع $y = 2\sin x - 1$ ابتدا در نمودار $y = \sin x$ عرض هر نقطه را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y = 2\sin x$ به دست آید.



نمودار $y = 2\sin x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y = 2\sin x - 1$ به دست آید.

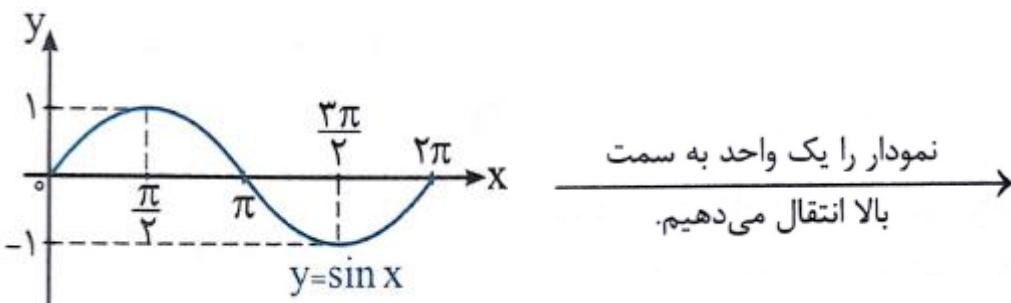


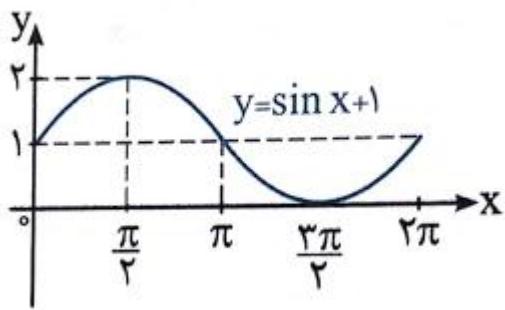
مثال: نمودار هر یک از توابع زیر را با توجه به نمودار $y = \sin x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

$$y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad (پ) \quad y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (ب) \quad y = \sin x + 1 \quad (ت)$$

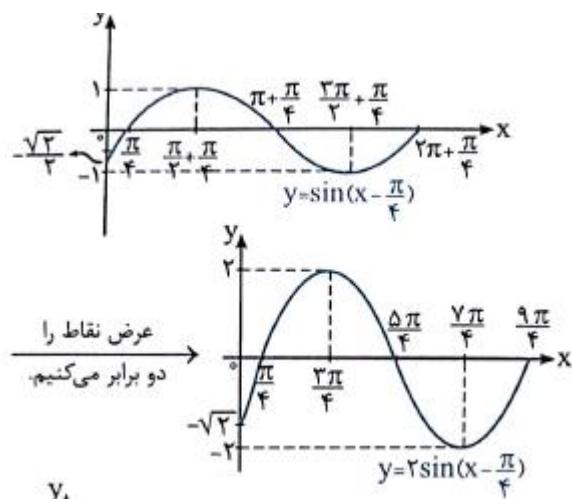
$$y = \sin(-x) \quad (ت)$$

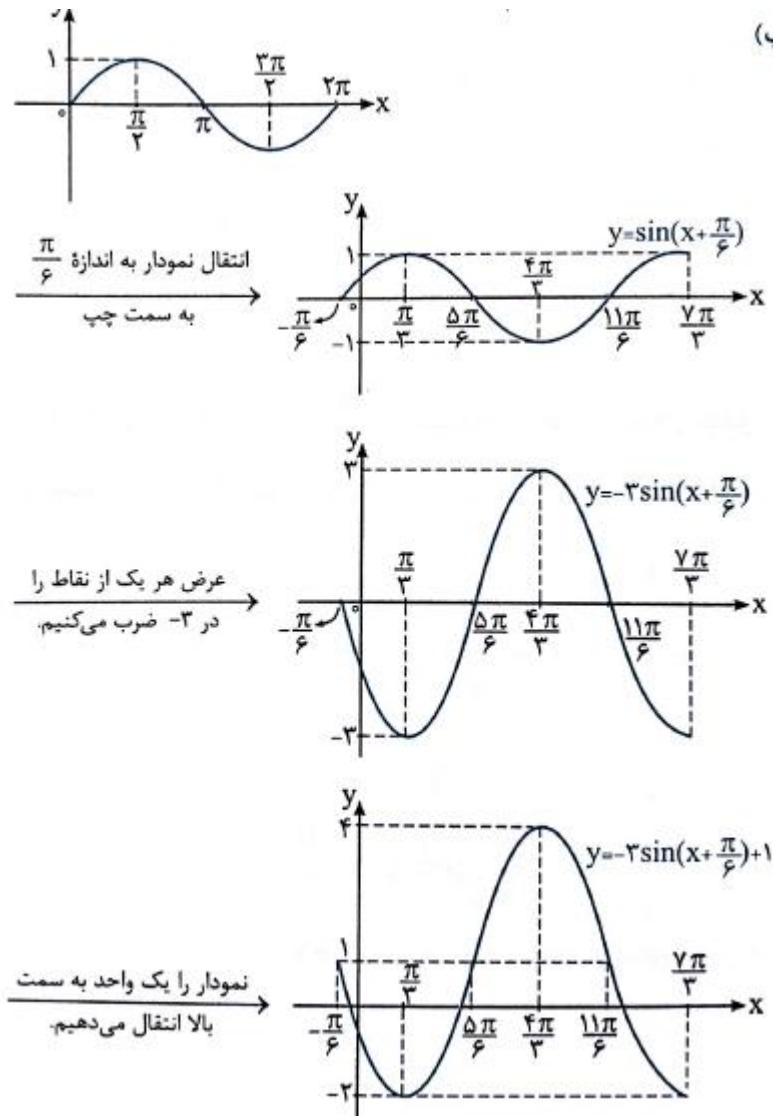
حل) (ت) اگر نمودار $y = \sin x$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم نمودار $y = \sin x + 1$ به دست می آید.





ب) ابتدا با انتقال $\frac{\pi}{4}$ واحد نمودار $y = \sin x$ به سمت راست نمودار $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را رسم می کنیم سپس عرض نقاط روی نمودار y را دو برابر می کنیم تا نمودار $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ به دست آید:

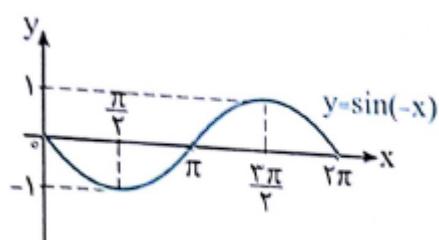




ت) با توجه به این که $\sin(-x) = -\sin x$ می باشد داریم

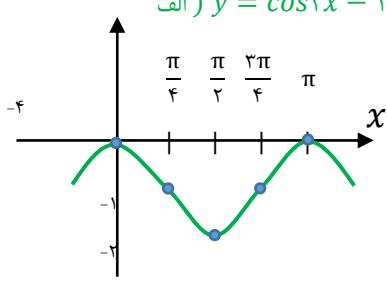
$$y = \sin(-x) = -\sin x$$

اگر نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور X ها قرینه کنیم. نمودار $y = -\sin x$ به دست می آید:

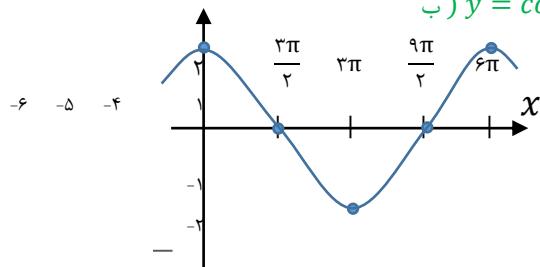


مثال: نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

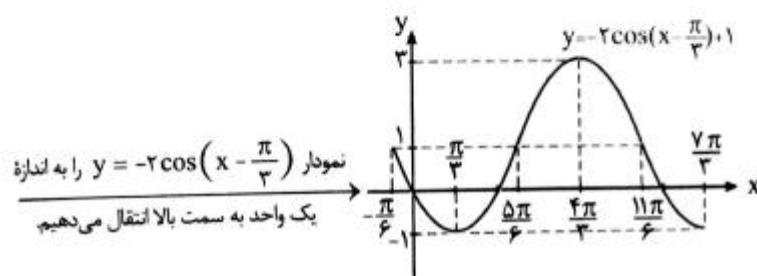
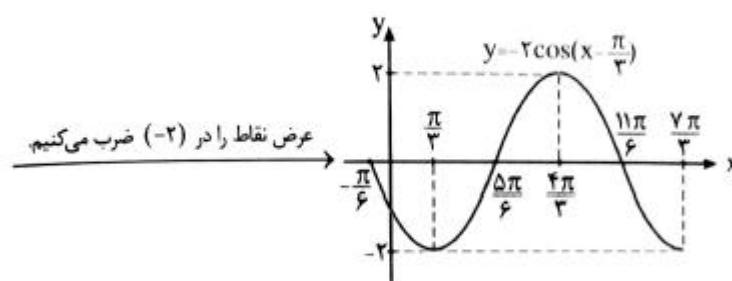
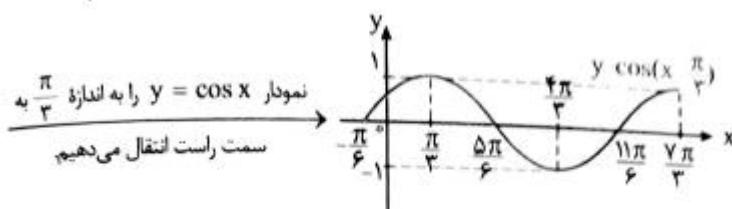
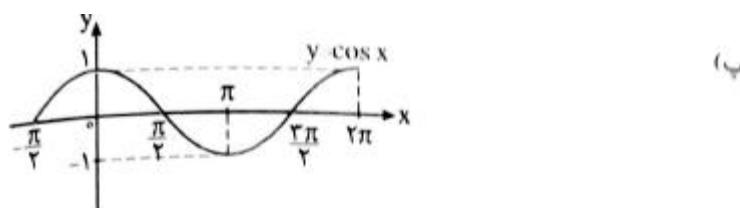
$$\text{الف) } y = \cos 2x - 1$$



$$\text{ب) } y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$



$$\text{پ) } y = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

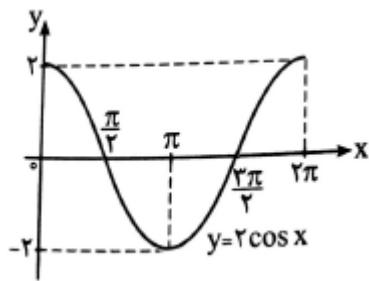


$$y = 3 \cos(-x)$$

حل) چون $\cos(-x) = \cos x$ می باشد، پس داریم

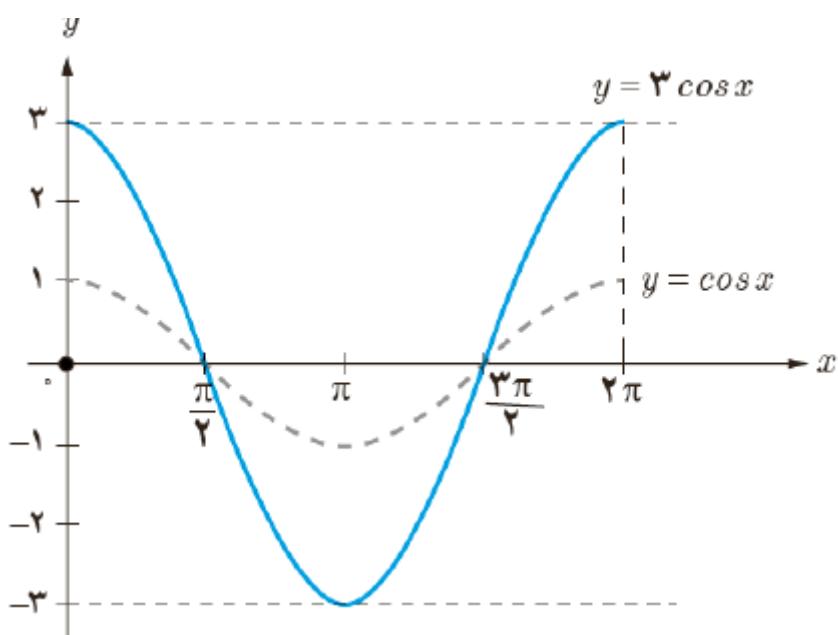
$$y = 2 \cos(-x) = 2 \cos x$$

برای رسم نمودار $y = 2 \cos x$ کافی است عرض نقاط روی نمودار $y = \cos x$ را دو برابر کنیم:

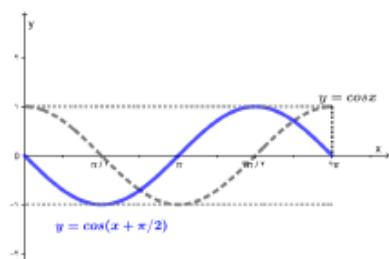


مثال: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3 \cos x$ را نشان می دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه

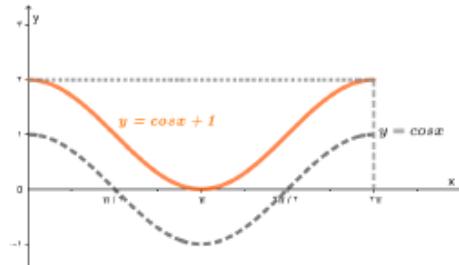
های داده شده را در بازه $[0, 2\pi]$ با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



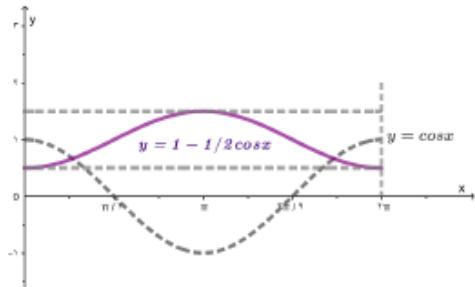
۱) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$



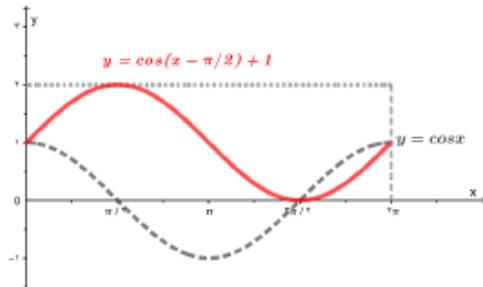
۲) $y = \cos x - 1$



۳) $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$



۴) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



نکته: برای رسم تابع $y = |f(x)|$ مراحل زیر را انجام می‌هیم

مرحله ۱) نمودار $y = f(x)$ را بدون در نظر گرفتن قدر مطلق رسم می‌کنیم

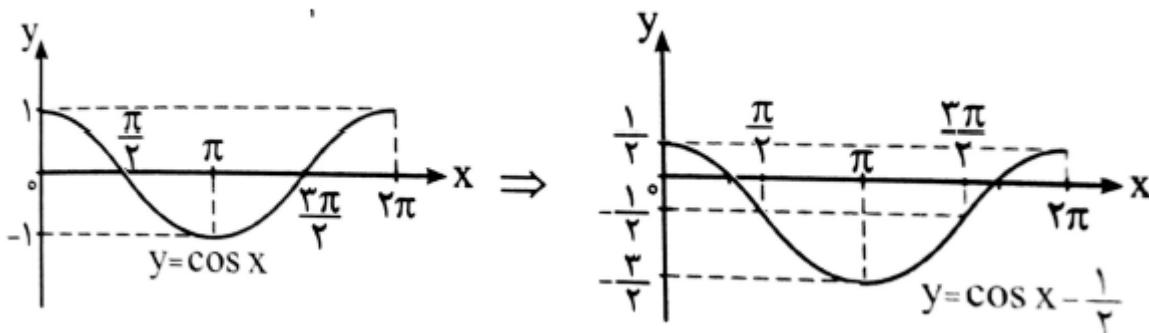
مرحله ۲) قسمت‌هایی از نمودار $y = f(x)$ که در پایین محور X ها قرار دارد را نسبت به محور X قرینه می‌کنیم

مرحله ۳) بعد از قرینه کردن قسمت‌های زیر محور X را پاک می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

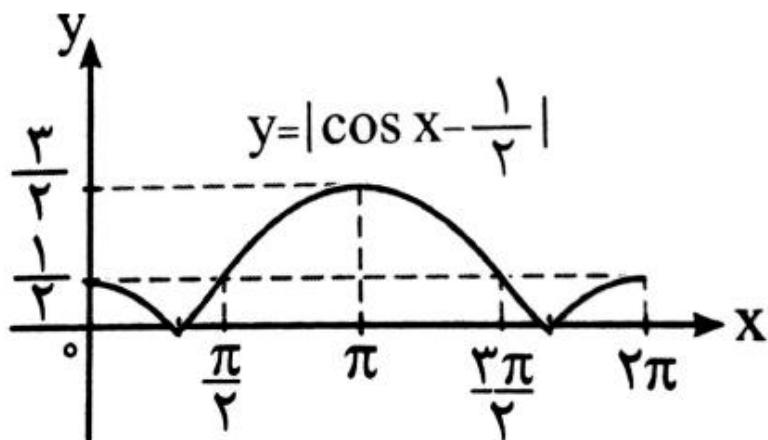
پاسخ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{2}$ را با انتقال نمودار تابع $y = \cos x$ به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین

رسم می‌کنیم:



قسمتی از نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{2}$ را که پایین محور X قرار دارد نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم.

نمودار به دست آمده نمودار تابع $y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|$ می‌باشد:

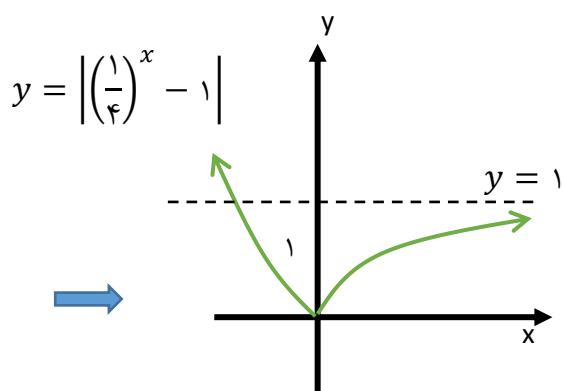


مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = \left| \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 \right|$$

حل) ابتدا نمودار $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را رسم می‌کنیم. سپس با قرینه کردن قسمت‌هایی از این نمودار که پایین محور

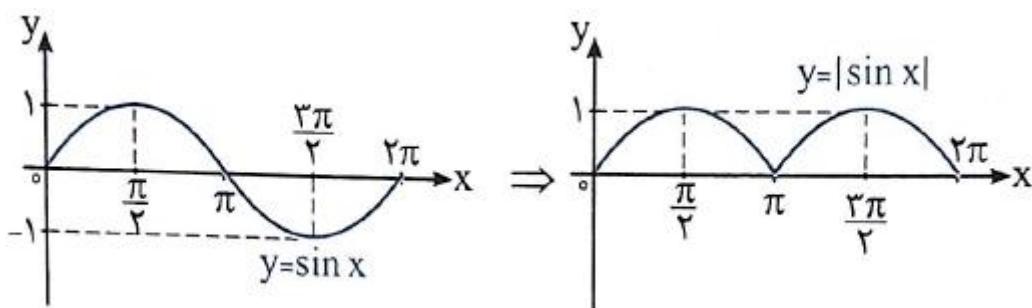
Xها قرار دارند نسبت به محور Xها نمودار $y = \left| \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 \right|$ رسم می‌شود:



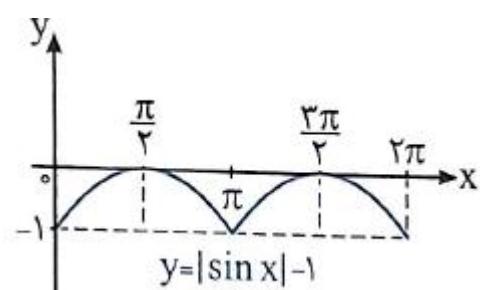
مثال: نمودار تابع $y = |\sin x| - 1$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

با قرینه کردن قسمت هایی از نمودار $y = \sin x$ که در پایین محور x قرار دارد نسبت به محور x نمودار

با قرینه کردن قسمت هایی از نمودار $y = \sin x$ که در پایین محور x قرار دارد نسبت به محور x نمودار $y = |\sin x|$ به دست می آید.

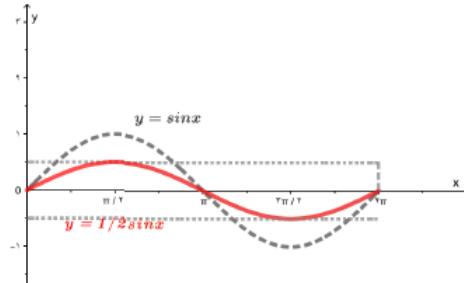


نمودار $y = |\sin x| - 1$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y = |\sin x|$ به دست آید.

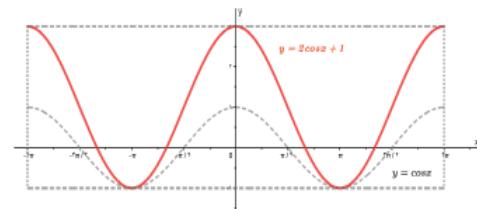


مثال: نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را در دستگاه مختصات در بازه های داده شده رسم کنید.

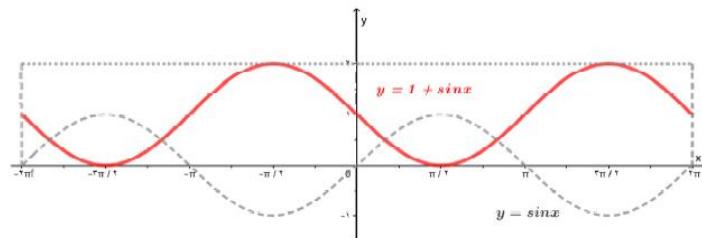
$$1) y = \frac{1}{2} \sin x \quad , \quad [0, 2\pi]$$



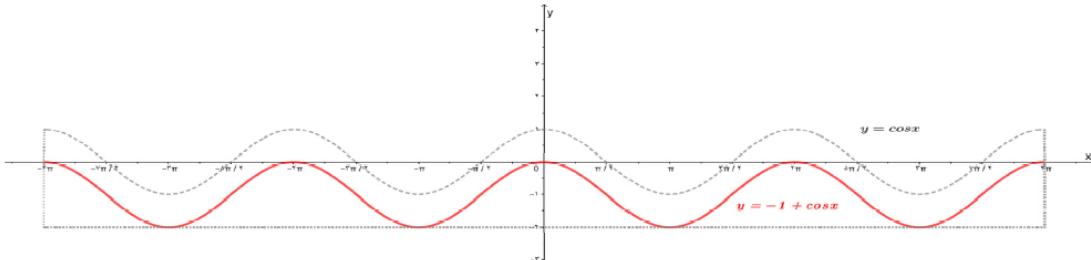
$$2) y = 2 \cos x + 1 \quad , \quad [-\pi, \pi]$$



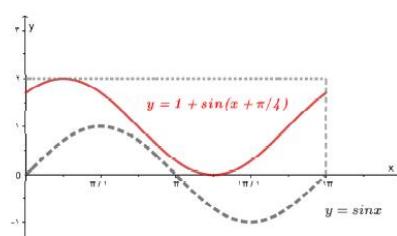
$$3) y = 1 - \sin x \quad , \quad [-\pi, \pi]$$



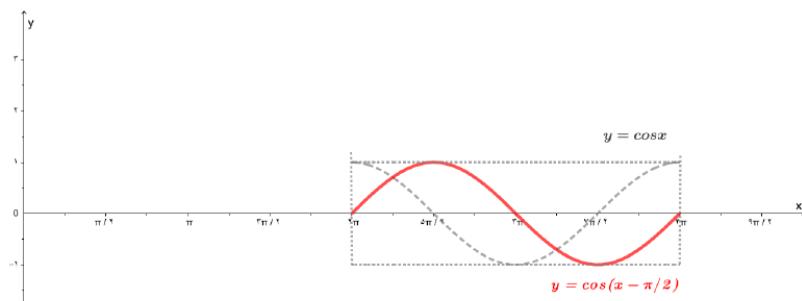
$$4) y = -1 + \cos x \quad , \quad [-\pi, \pi]$$



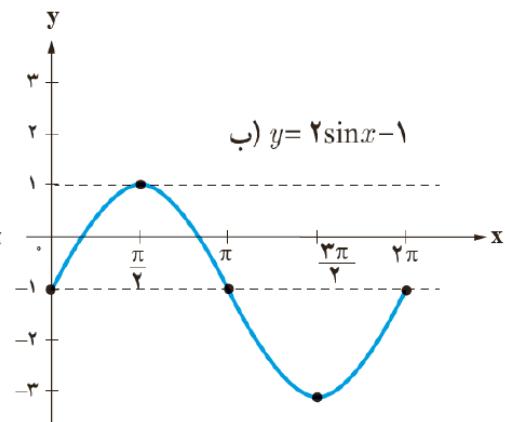
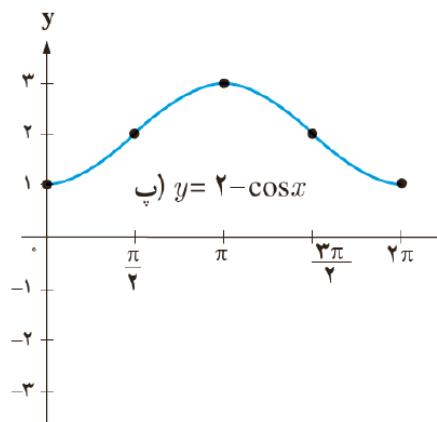
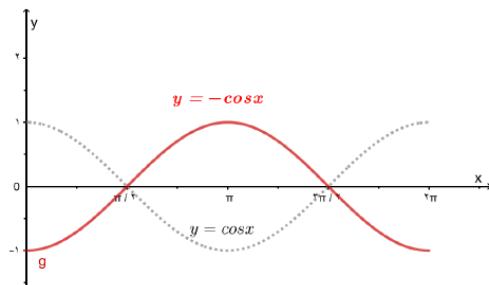
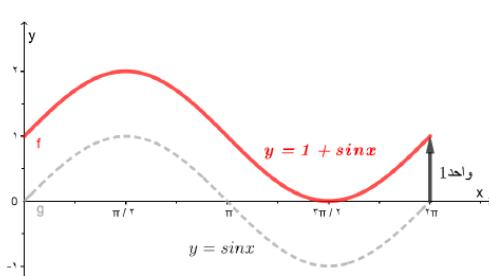
۵) $y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $[0^\circ, 2\pi]$



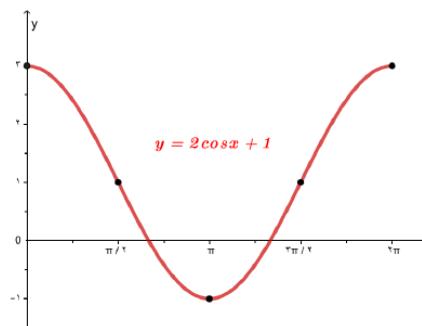
۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $[2\pi, 4\pi]$



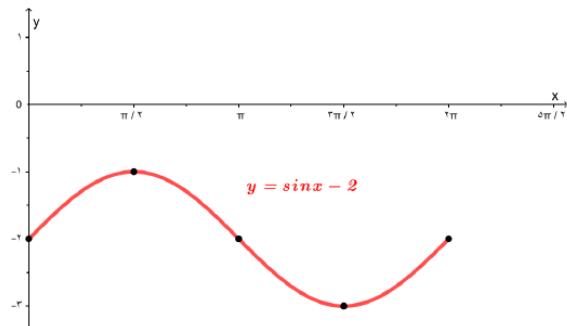
مثال: با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضوابط ها را نیز رسم کنید.



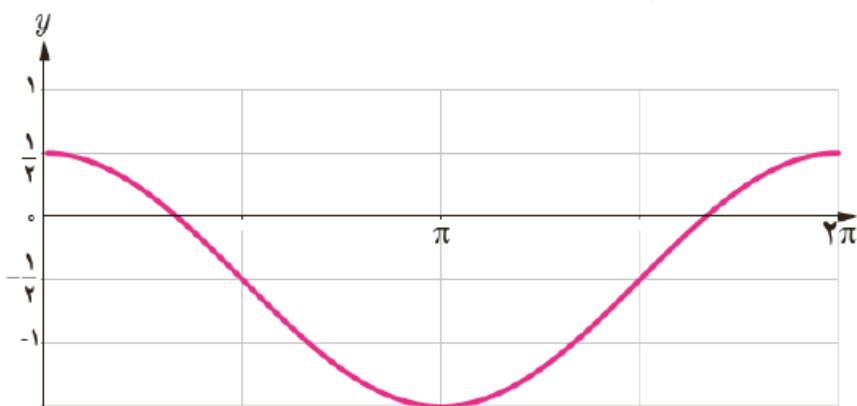
(الف) $y = 2\cos x + 1$



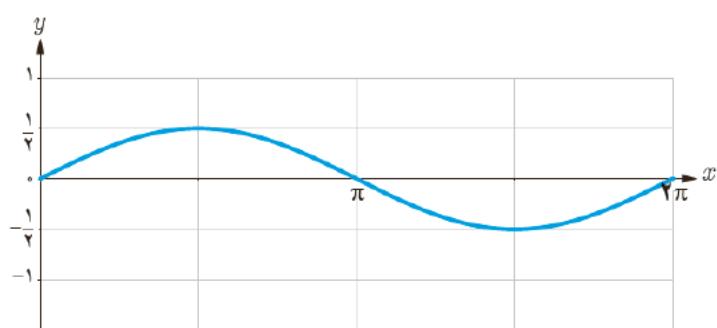
(ت) $y = \sin x - 2$



$$y = \cos x - \frac{1}{2}$$



$$y = \frac{1}{2} \sin x$$



مثال : هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

(الف) $y = \sqrt{2+x} \rightarrow a$

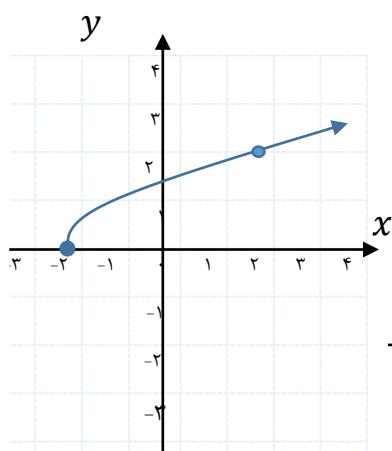
(ب) $y = 2 + \sqrt{x} \rightarrow d$

(پ) $y = -2\sqrt{x} \rightarrow e$

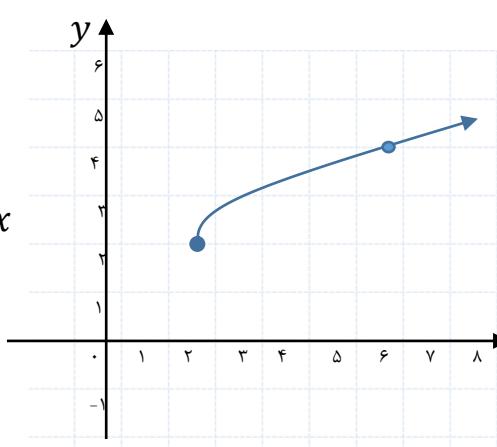
(ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow c$

(ث) $y = 2 + \sqrt{x-2} \rightarrow b$

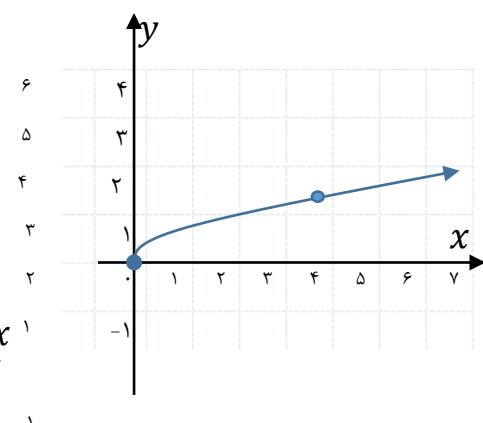
(ج) $y = \sqrt{-2x} \rightarrow \psi$



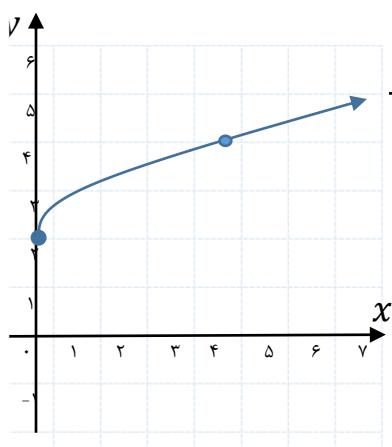
(a)



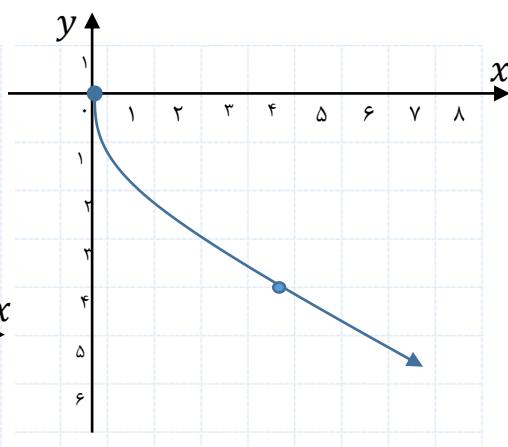
(b)



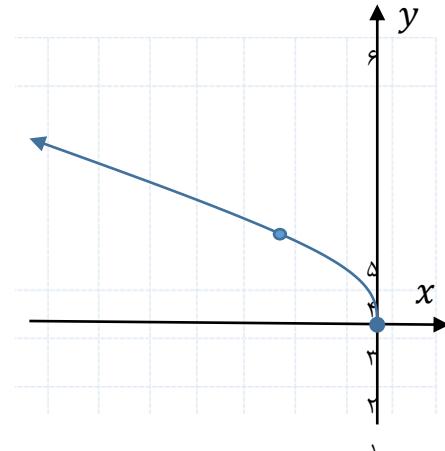
(c)



(d)



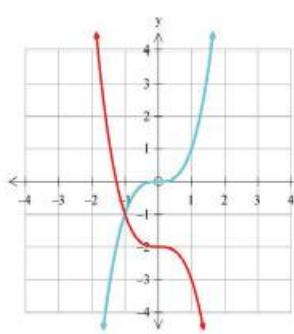
(e)



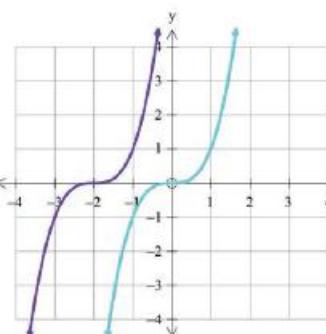
(f)

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع زیر را رسم کنید

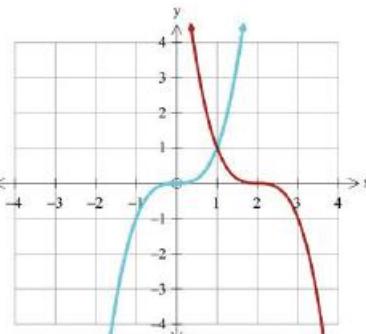
الف) $y = -x^3 - 2$



ب) $y = (x + 2)^3$



پ) $y = -(x - 2)^3$



مثال: به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x - 1)^3 + 2$

۶

ب) $y = (x - 2)^3$

۹

پ) $y = -x^3$

۵

ج) $y = x^3 + 1$

۴

د) $y = (x + 1)^3 - 1$

۷

ه) $y = -x^3 - 1$

۳

ز) $y = (x + 1)^3$

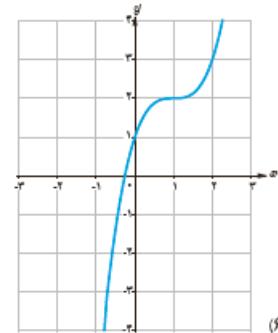
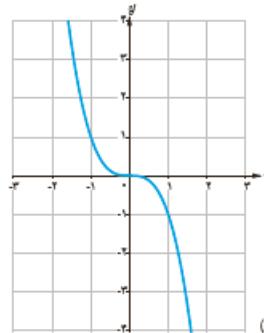
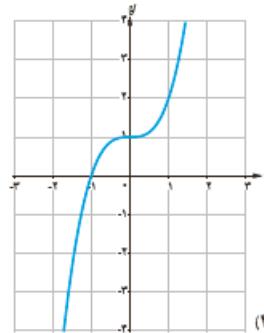
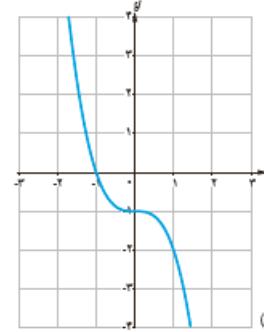
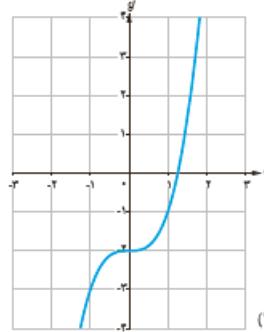
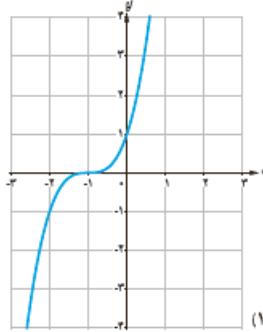
۸

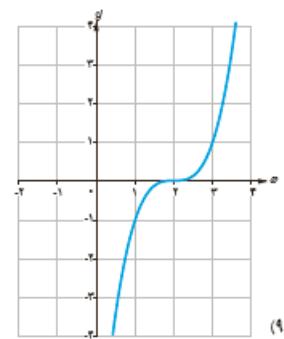
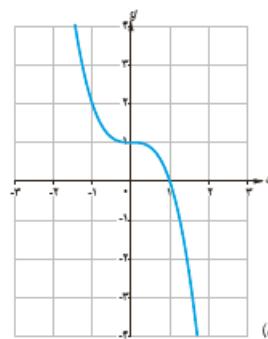
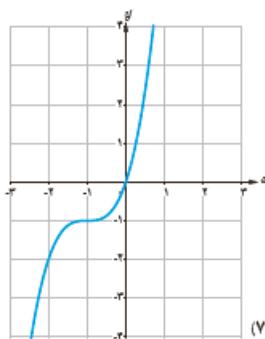
ح) $y = -x^3 - 1$

۱

چ) $y = x^3 - 2$

۲





مثال: با توجه به نمودارهای داده شده مشخص کنید هر یک از نمودارها دارای کدام یک از ضابطه های

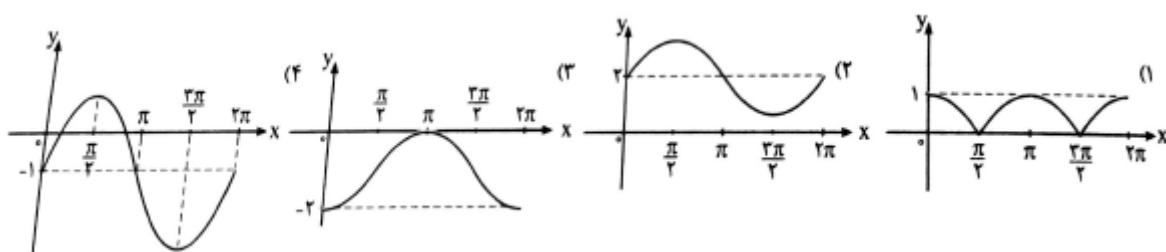
داده شده هستند؟

$$y = -\cos x - 1 \quad (\text{ب})$$

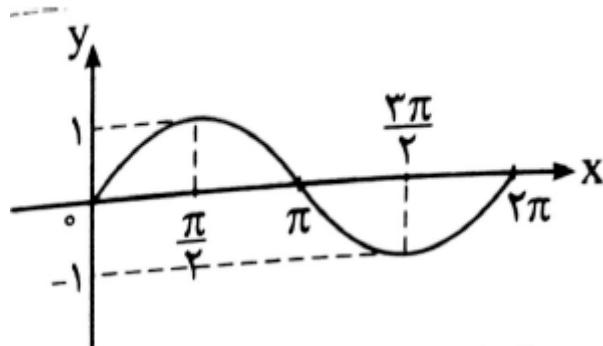
$$y = \sin x + 2 \quad (\text{T})$$

$$y = 2 \sin x - 1 \quad (\text{ت})$$

$$y = |\cos x| \quad (\text{پ})$$

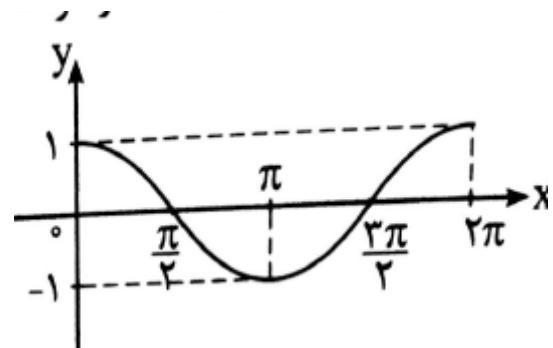


(T) نمودار $y = \sin x$ به صورت زیراست



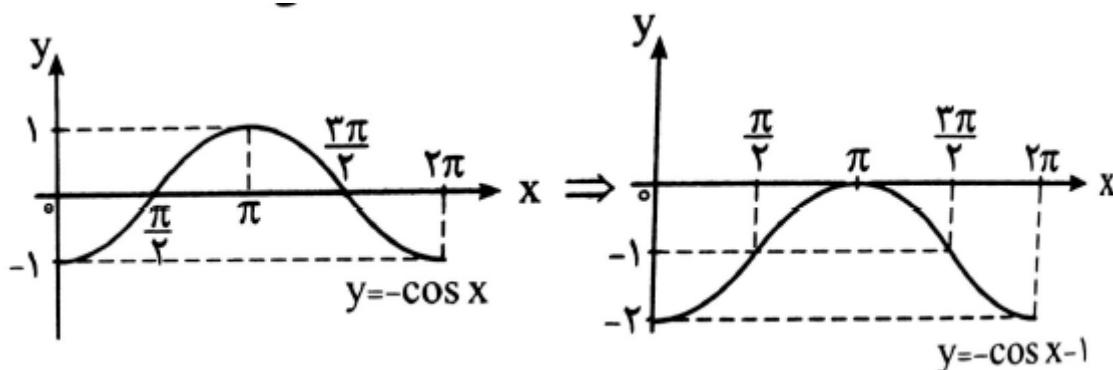
اگر این نمودار ۲ واحد به سمت بالا انتقال داده شود نمودار شکل (۳) به دست می آید.

ب) نمودار $y = \cos x$ به صورت زیراست.



اگر این نمودار را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم نمودار

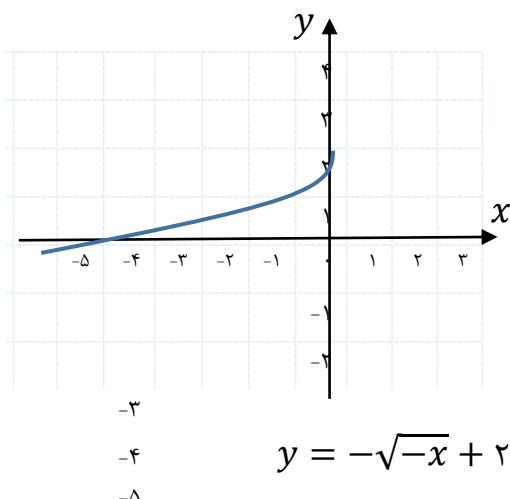
شکل (۲) به دست می آید:



پ) با قرینه کردن نمودار $y = |\cos x|$ درباره محور x نمودار $y = \sin x$ به دست

می‌آید که این نمودار در شکل (۱) حاصل می‌شود.

ت) اگر عرض نقاط واقع بر نمودار $y = \sin x$ را دو برابر کنیم و سپس نمودار را یک واحد به سمت پایین منتقال دهیم. نمودار $y = 2\sin x - 1$ به دست می‌آید که نمودار شکل (۴) نمودار حاصل است.



مثال: نمودار تابع مقابله از قرینه‌یابی و منتقال نمودار تابع

$y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است. بنابراین ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر می‌باشد.

$$y = -\sqrt{-x} + 2$$

درس اول بخش دوم

تابع صعودی و نزولی

توجه:

جهت تهیه ادامه‌ی این جزو (فصل اول ریاضی دوازدهم تجربی) به شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ و یا به آیدی تلگرام

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبيب هاشمي کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با نوزده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس‌های کنکور؛ دیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و

یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

ایнстاستیو: academy.riazi

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمي در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

موفق بودن در ریاضی ا درصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

تدریس خصوصی ریاضیات

متوجهه اول و متوجهه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملاً مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبير رسمی آموزش و پرورش با ۱۹ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مولف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱