ماتریسها و حل دستگاه معادلات خطی

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

دانشجویان مخاطب: دانشجویان همه رشته های مهندسی

1

ماتریس ها

ماتریس واحد مرتبه n:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2

ماتریس ها

ماتریس پایین مثلثی:

$$\begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلثی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس متقارن:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس

دترمینان فقط برای ماتریس های مربعی تعریف می گردد.

مثال:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = 0\times 4 - 2\times 5 = -10$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-25) - 1(12+5) - 1(15-0) = -82$$

قضیه: ماتریس A نامنفرد (وارون پذیر) است (یعنی معکوس A وجود دارد) اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

حاصلضرب دو ماتریس

در صورتی می توان حاصلضرب **AxB** دو ماتریس **A** و **B** را بدست آورد که تعداد ستونهای ماتریس **A** با تعداد سطرهای ماتریس **B** برابر باشند .

$$A_{n\times m}B_{m\times q}=C_{n\times q}$$

$$C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i, j$$

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی را می توان به شکلهای مختلفی نمایش داد:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2.5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad - 6x_3 = 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2.5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

فرم معمولی　　　　　　　　فرم ماتریسی

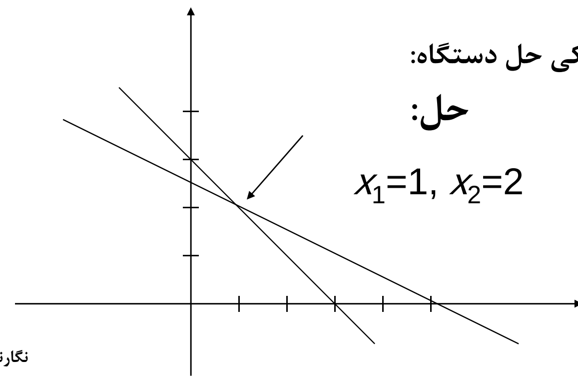
حل دستگاه معادلات

مقادیری می باشند که در دستگاه معادلات صدق می کنند.

مثال:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تفسیر گرافیکی حل دستگاه:



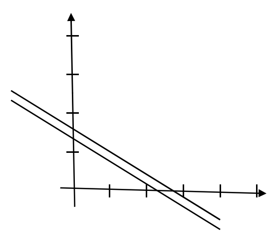
حل:

$x_1=1,\ x_2=2$

حل دستگاه معادلات

- **اگر دستگاه معادلات دارای جواب نباشد آن را متناقض می نامند:**

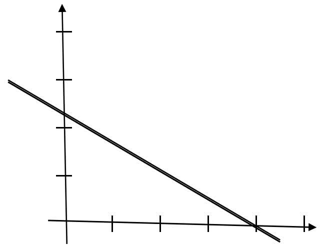
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5 \end{aligned}$$



- **ممکن است دستگاه معادلات بینهایت جواب داشته باشد:**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0.5(3-a) \end{bmatrix}$$



روشهای حل دستگاه معادلات خطی

- **روشهای مستقیم**

روش کرامر، معکوس ماتریس، روش حذفی گوس و ...

- **روشهای تکراری**

در این روشها به تقریبی از جواب می توان رسید.

مثل: روش ژاکوبی، روش گوس سایدل و ...

روشهای مستقیم : روش معکوس ماتریس ضرایب

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \qquad \text{since } A^{-1}A = I \\ x &= A^{-1}b \qquad \text{since } Ix = x \end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7. \end{aligned}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-9}{4} & 1 \\ \frac{5}{4} & \frac{17}{4} & -2 \\ \frac{-3}{4} & \frac{-7}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

روشهای مستقیم حل دستگاه معادلات خطی

در بعضی از روشهای مستقیم، هدف این است که با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، به فرم ساده تری از معادلات رسیده و آنها را حل کنیم:

عملیات سطری مقدماتی عبارتند از:

۱- تعویض دو سطر (معادله).

۲- ضرب یک سطر (معادله) در یک عدد غیرصفر

۳- ضرب یک سطر (معادله) در عددی غیرصفر و جمع کردن آن با سطری دیگر

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

11

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

نکته

حل دستگاهی مانند دستگاه زیر که ماتریس آن بالامثلثی می باشد، آسان تر است.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، سعی می نماییم که به فرم ساده تر بالامثلثی برسیم.

12

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

روش حذفی گوس

- این روش شامل دو مرحله می باشد:
  - **مرحله اول:** تبدیل ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی با استفاده از عملیات سطری مقدماتی.
  - **مرحله دوم:** حل و جایگذاری معکوس از آخرین معادله.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$$

13

مثال۱

دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گوس حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

حل: مرحله اول: تبدیل ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی

ابتدا، x_1 را از معادلات ۲، ۳ و ۴ حذف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix}$$

14

مثال۱

ادامه حل: x_2 را نیز از معادلات ۳ و ۴ حذف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

سپس، x_3 را از معادله ۴ حذف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب،
بالامثلثی شد

مثال۱

ادامه حل: مرحله دوم: حل معکوس از آخرین معادله:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ابتدا x_4 ، سپس، x_3، سپس x_2 و سپس x_1 بدست می آیند:

$$x_4 = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad x_3 = \frac{-9+5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-6-2(-2)-2(1)}{-4} = 1, \quad x_1 = \frac{16+2(1)-2(-2)-4(1)}{6} = 3$$

کوییز:

دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گوس حل کنید.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_3 &= 18 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

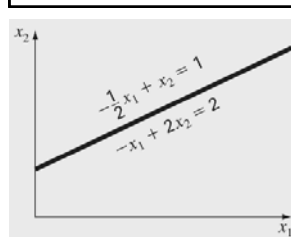
$$
\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]
\downarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]
$$

تعداد جوابهای دستگاه معادلات AX=B

بینهایت جواب

$\det(A) = 0$

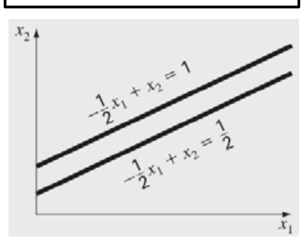
پس از اعمال روش حذفی، دارای سطرهای صفر بوده و مقدار **B** در آن سطرها نیز برابر صفر است



بدون جواب

$\det(A) = 0$

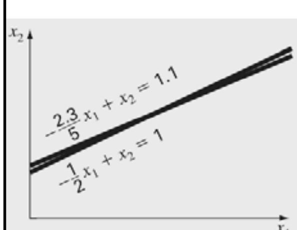
پس از اعمال روش حذفی، دارای سطرهای صفر بوده و مقدار **B** در آن سطرها غیر صفر است



جواب منحصر به فرد

$\det(A) \neq 0$

پس از اعمال روش حذفی، دارای سطرهای صفر نمی باشد



مثال

جواب منحصر به فرد	بدون جواب	بینهایت جواب
$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$
solution:	*No solution*	*Infinite # solutions*
$X=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	$0=-1$ *impossible*!	$X=\begin{bmatrix}\alpha\\1-.5\alpha\end{bmatrix}$

19

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

روش ژاکوبی و روش گوس-سایدل

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

روش ژاکوبی

فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

فرم معادلات

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_1 \end{cases}$$

حل هر معادله برحسب یکی از متغیرها

$$x_1^j = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{j-1} - a_{13}x_3^{j-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^j = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{j-1} - a_{23}x_3^{j-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^j = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{j-1} - a_{32}x_2^{j-1}}{a_{33}}$$

روش گوس-سایدل

فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

فرم معادلات

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_1 \end{cases}$$

حل هر معادله برحسب یکی از متغیرها

$$x_1^j = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{j-1} - a_{13}x_3^{j-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^j = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{j} - a_{23}x_3^{j-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^j = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{j} - a_{32}x_2^{j}}{a_{33}}$$

مثال۱:

با استفاده از روش تکرار ژاکوبی، دستگاه روبرو را حل کنید: (با حدس اولیه صفر برای هر سه مقدار مجهول)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

حل:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.616667$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(0) + 0.3(0)}{7} = -2.757143$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(0) + 0.2(0)}{10} = -7.14$$

23

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

ادامه مثال۱:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

$$x_1 = 2.616667$$
$$x_2 = -2.757143$$
$$x_3 = -7.14$$

$$x_1 = \frac{-19.3 - 0.1(-2.757143) + 0.3(-7.14)}{7} = ?$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0.3(-7.14)}{7} = ?$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.757143)}{10} = ?$$

24

نگارنده: دکتر علی حاج نایب

مثال۲:

با استفاده از روش گوس-سایدل، دستگاه روبرو را حل کنید:
(با حدس اولیه صفر برای هر سه مقدار مجهول)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

حل:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

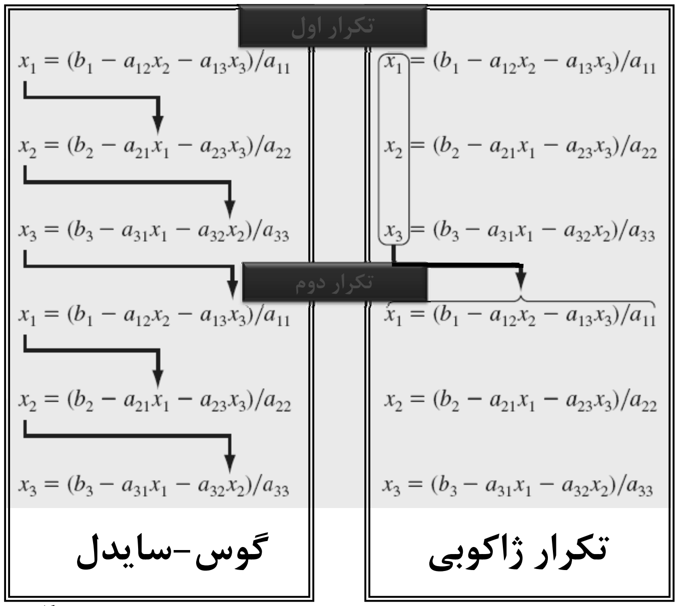
$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.616667$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0.3(0)}{7} = -2.794524$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

ادامه مثال۲:

در گام بعدی:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$
$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$
$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

مقایسه روش گوس–سایدل و تکرار ژاکوبی



27

نکته

۱. روشهای ژاکوبی و گوس–سایدل، تضمین همگرایی ندارند.
۲. شرط توقف عملیات، نزدیک شدن مقادیر بدست آمده در دو تکرار متوالی می باشد.

28

تمرین غیر کامپیوتری

دستگاه معادلات زیر را با انتخاب نقطه اولیه مناسب و با استفاده از روش ژاکوبی حل کرده و با حل دقیق بدست آمده از معکوس ماتریس و روش حذفی گوس برای آن مقایسه کنید.

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

29

نگارنده: دکتر علی حاج نایب