

آزمون پیشرفت تحصیلی

دبیرستان های استعداد های درخشان سراسر کشور

سال تحصیلی ۹۶ - ۱۳۹۵

پایه ی دهم (ریاضی ۱)

تهیه و تنظیم این مجموعه : آقای ملاسعدی

دبیر ریاضی دبیرستان آبادان

<https://telegram.me/Salehin95math>

تاریخ برگزاری آزمون ۱۳۹۵/۱۱/۰۳ ساعت ۹:۰۰ صبح

کاتال تخصصی ریاضی دهم ، قابل استفاده برای همکاران و دانش آموزان

۱- مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x^2 - 1| < 100\}$  چند عضو دارد ؟

۱۱ (۴) عضو دارد

۱۰ (۳) عضو دارد

۲۱ (۲) عضو دارد

۲۰ (۱) عضو دارد

پاسخ :  $-100 < x^2 - 1 < 100 \xrightarrow{+1} -99 < x^2 < 101 \Rightarrow x^2 < 101 \Rightarrow -\sqrt{101} < x < \sqrt{101}$

گزینه ۲ صحیح است  $\Rightarrow A$  دارای ۲۱ عضو است .  $\Rightarrow A = \{-10, -9, -8, \dots, 0, \dots, 8, 9, 10\}$   $-10 \leq x \leq 10$



۲- در دو مجموعه  $A$  و  $B$  ،  $(A - B) \cap (B - A) = A$  ، کدام گزینه درست نیست ؟

(۱)  $A \cup \emptyset = \emptyset$       (۲)  $A \cap B = \emptyset$       (۳)  $B - A = \emptyset$       (۴)  $A \cap B' = \emptyset$

پاسخ : می دانیم  $A - B$  و  $B - A$  دو مجموعه ی جدا از هم هستند بنابراین  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$  در نتیجه  $A = \emptyset$  .

لذا با قرار دادن تهی به جای در هر کدام از گزینه ، متوجه می شویم گزینه های ۱ و ۲ و ۴ صحیح اند و گزینه ۳ ناصحیح است زیرا :  $B - A = B - \emptyset = B$

در نتیجه گزینه ۳ جواب است .



۳- حاصل عبارت  $(A - (A - B)) \cup (B \cap (A \cap B)')$  کدام است ؟

(۱)  $A - B$       (۲)  $A'$       (۳)  $B$       (۴)  $A \cap B$

پاسخ :  $[A \cap (A \cap B)'] \cup [B \cap (A' \cup B)] = [A \cap (A' \cup B)] \cup [(B \cap A') \cup \underbrace{(B \cap B)}_{\emptyset}]$

گزینه ۳ صحیح است  $\Rightarrow [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') = (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap \underbrace{(A \cup A')}_U = B$



۴- در مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  چند عدد دقیقاً بر یکی از اعداد ۵ و ۷ بخش پذیر نیست ؟

۱۵۲ (۴)

۲۶۶ (۳)

۲۵۲ (۲)

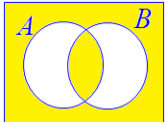
۲۰۰ (۱)

پاسخ : نکته : اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  را در نظر بگیرید ، برای تعیین تعداد مضارب عدد  $k$  ، کفایت  $n$  را بر  $k$  تقسیم کرده سپس قسمت صحیح این تقسیم

جواب می باشد .

به عنوان نمونه اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را در نظر می‌گیریم. از تقسیم ۱۰۰۰ بر ۷ عدد ۱۴۲/۸۵ بدست می‌آید یعنی ۱۴۲ تا از این اعداد بر ۷ بخش پذیرند. به

همین ترتیب  $\frac{1000}{5} = 200$  یعنی ۲۰۰ تا از آنها بر ۵ بخش‌پذیرند و به همین ترتیب  $\frac{1000}{35} = 28$  یعنی ۲۸ تا از آن اعداد بر ۳۵ بخش پذیرند.



اگر  $A$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۷ و  $B$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ فرض شوند، آنگاه  $A \cap B$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر

۵ و ۷ یعنی بر ۳۵ می‌باشد. طبق شکل می‌توان گفت جواب مسئله، تعداد اعضای قسمت‌های رنگی است.

ابتدا تعداد اعضای قسمت‌های سفید را حساب کرده و از تعداد کل یعنی ۱۰۰۰ کم می‌کنیم.

$$(n(A) - n(A \cap B)) + (n(B) - n(A \cap B)) = (142 - 28) + (200 - 28) = 286$$

هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.  $\Rightarrow 1000 - 286 = 714$  = تعداد اعضای قسمت رنگی (جواب سوال)



۵- در یک کلاس ۲۵ نفری، سه کلاس فوق برنامه ثبت نام کردند ولی می‌تواند در بیش از یک کلاس هم ثبت نام کنند. اگر در هر یک از این سه کلاس به ترتیب

۱۸ و ۲۰ و ۲۲ نفر ثبت نام کرده باشند، کدام گزینه درست است؟

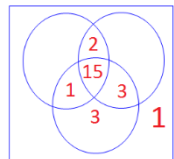
(۱) همه دانش‌آموزان در حداقل یک کلاس ثبت نام کرده‌اند.

(۲) حداقل ۱۰ نفر در هر سه کلاس ثبت نام کرده‌اند.

(۳) حداقل ۵ نفر در هیچ کلاسی ثبت نام نکردند.

(۴) حداکثر ۱۵ نفر در بیش از یک کلاس ثبت نام کرده‌اند.

پاسخ: دانش‌آموزان هر یک از سه کلاس فوق برنامه را به صورت سه دایره، زیر مجموعه‌ای از کلاس ۲۵ نفره (مستطیل شکل) نمایش می‌دهیم.



گزینه ۱ رد می‌شود زیرا برای آن مثال نقض داریم. طبق شکل مقابل می‌تواند حداقل یک دانش‌آموز در هیچ کلاسی شرکت نکند.

گزینه ۳ رد می‌شود زیرا اگر حداقل ۵ نفر در هیچ کلاسی نباشند پس یعنی حد اکثر ۲۰ نفر در کلاس‌ها شرکت کرده‌اند و این با عدد ۲۲ تناقض دارد.

گزینه ۴ نیز رد می‌شود زیرا مطابق شکل قبل حالتی را نشان داده ایم که ۲۱ نفر در بیش از یک کلاس شرکت کرده‌اند.

بنابراین فقط گزینه ۲ باقی می‌ماند که صحیح محسوب می‌شود.



۶- اگر  $a_i$  ها نشان دهنده یک تصاعد حسابی و  $b_i$  ها جملات یک تصاعد هندسی باشند، چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

الف)  $a_i + b_i$  یک تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند.

ب)  $a_i^2$  یک تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهند.

پ)  $\frac{1}{b_i}$  یک تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهند.

ت) اگر هر جمله‌ی  $a_i$  را در عدد ثابت  $t$  ضرب کنیم حاصل یک تصاعد حسابی خواهد بود.

ث) اگر هر جمله‌ی  $b_i$  را با عدد ثابت  $t$  جمع کنیم حاصل یک تصاعد هندسی خواهد بود.

ج)  $a_i \times b_i$  یک تصاعد هندسی است.

پاسخ: دنباله ی  $1, 2, 3, \dots$  را به عنوان نمونه ای از دنباله ی حسابی ( $a_j$ ) و دنباله ی  $1, 2, 4, \dots$  را به عنوان مثالی از دنباله ی هندسی ( $b_j$ ) معرفی می کنم.

و حالت های گفته شده را بررسی می کنم:

حالت الف: نادرست است زیرا اگر نظیر به نظیر جملات دنباله ها را با هم جمع کنیم دنباله ی  $2, 4, 7, \dots$  بدست می آید که حسابی نیست.

حالت ب: نادرست است زیرا اگر تک تک جملات دنباله ی حسابی را به توان ۲ برسانیم دنباله ی  $1, 4, 9, \dots$  بدست آمده که هندسی نیست.

حالت پ: نادرست است زیرا اگر دنباله ی هندسی به صورت  $\circ, \circ, \circ, \dots$  باشد جملات آن وارون پذیر نیستند اما در صورتی که ناصفر بودن

در سوال ذکر می شد، این حالت درست بود زیرا در مثال فوق با معکوس کردن تک تک جملات یک دنباله ی هندسی بدست می آید یعنی

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  دنباله ی هندسی است. (این موضوع در حالت کلی به راحتی قابل اثبات است.)

حالت ت: درست است زیرا اگر تک تک جملات دنباله ی حسابی مان را در عدد ثابتی مثل  $t$  ضرب کنیم دنباله ی  $t, 2t, 3t, \dots$  بدست آمده

که حسابی با قدر نسبت  $t$  است. (این موضوع در حالت کلی به راحتی قابل اثبات است.)

حالت ث: نادرست است زیرا با فرض  $t = 1$  دنباله ی هندسی به صورت  $2, 3, 5, \dots$  تبدیل شده که هندسی نیست.

حالت ج: نادرست است زیرا اگر نظیر به نظیر جملات دنباله ها را در هم ضرب کنیم دنباله ی  $1, 4, 12, \dots$  بدست می آید که هندسی نیست.

بنابراین فقط یک حالت (حالت ت) صحیح است لذا گزینه ۱ صحیح می باشد.



۷- اگر مجموع  $n$  جمله ی اول دنباله ای از رابطه ی  $S_n = 3n^3 - n$  به دست آید مجموع دو جمله چهارم و ششم این دنباله چقدر است؟

۱۱۰ (۴)

۳۵۲ (۳)

۳۰۰ (۲)

۳۸۲ (۱)

پاسخ: نکته: اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله ی نخست یک دنباله باشد، آنگاه جمله ی  $n$  ام آن دنباله برابر است با:  $a_n = S_n - S_{n-1}$ .

$$a_4 = S_4 - S_3 = (3 \times 4^3 - 4) - (3 \times 3^3 - 3) = 110$$

$$a_6 = S_6 - S_5 = (3 \times 6^3 - 6) - (3 \times 5^3 - 5) = 272$$

$$a_4 + a_6 = 110 + 272 = 382 \Rightarrow \text{گزینه ی ۱ صحیح است}$$



۸- اگر جمله عمومی دنباله ای به صورت  $u_n = an^2 + bn + c$  باشد و جمله اول برابر ۹- و جمله سوم برابر ۱- و جمله پنجم ۱۵ باشد، جمله هفتم این

$-\frac{1}{4}$  (۴)

صفر (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۴ (۱)

دنباله کدام است؟

پاسخ:  $u_1 = -9 \Rightarrow a + b + c = -9$  [۱],  $u_3 = -1 \Rightarrow 9a + 3b + c = -1$  [۲],  $u_5 = 15 \Rightarrow 25a + 5b + c = 15$  [۳]

$$\left. \begin{array}{l} [۲] - [۱] \Rightarrow 8a + 2b = 8 \\ [۳] - [۱] \Rightarrow 24a + 4b = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 0 \xrightarrow{[۱]} c = -10 \Rightarrow u_n = n^2 - 10$$

$\Rightarrow u_7 = 49 - 10 = 39 \Rightarrow$  هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

۹- اگر  $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2$  باشد.  $S_{1395} + S_{1396}$  کدام است؟

$(1) -1397$                        $(2) 1397$                        $(3) 1395$                        $(4) -1395$

$$S_{1396} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 1395^2 - 1396^2$$

پاسخ:  $(1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (1395-1396)(1395+1396)$

$$= 1+2+3+4+\dots+1395+1396 = \frac{1396 \times 1397}{2}$$

$$S_{1395} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 1395^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 1395^2 - 1396^2 + 1396^2$$

$$= S_{1396} + 1396^2 = \frac{1396 \times 1397}{2} + 1396^2$$

$$\Rightarrow S_{1396} + S_{1395} = -\frac{1396 \times 1397}{2} - \frac{1396 \times 1397}{2} + 1396^2 = -1396 \left( \frac{1397}{2} + \frac{1397}{2} - 1396 \right) = -1396(1397 - 1396) = -1396$$

هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.



۱۰- اگر ارتفاع های مثلثی یک تصاعد هندسی بسازند، قدر نسبت این تصاعد، کدام گزینه می تواند باشد؟

$(1) 2$                        $(2) 1/9$                        $(3) 1/5$                        $(4) 3$

پاسخ: توجه: اگر ارتفاع های مثلثی به صورت  $h_a, h_b, h_c$  تشکیل دنباله ی هندسی دهند، اضلاع آن مثلث به شکل  $a, b, c$  تشکیل دنباله ی هندسی با همان قدر نسبت خواهند داد.

اگر  $r$  را به عنوان قدر نسبت این دنباله در نظر بگیریم، می توان دنباله را به صورت  $c, cr, cr^2$  نوشت.

$$1+r > r^2 \leftarrow \frac{c}{c} \quad c + cr > cr^2$$

یعنی مجموع دو ضلع از ضلع سوم بیشتر است

لذا گزینه ای جواب است که در این نامساوی صدق کند، پس گزینه ی ۳ صحیح می باشد.



۱۱- روس محور اعداد حقیقی فاصله  $0$  تا  $1$  را به سه قسمت برابر تقسیم کرده و بخش میانی را انتخاب می کنیم و همین عمل را برای این بازه تکرار کرده، اگر این

کار را  $7$  بار تکرار کنیم بازه حاصل کدام است؟

$(1) \left[ \frac{1}{3^7}, \frac{2}{3^7} \right]$                        $(2) \left[ \sum_{i=1}^7 \frac{1}{3^i}, \sum_{i=1}^7 \frac{2}{3^i} \right]$                        $(3) \left[ \sum_{i=1}^6 \frac{1}{3^i}, \sum_{i=1}^7 \frac{1}{3^i} \right]$                        $(4) \left[ \frac{1}{3^6}, \frac{1}{3^7} \right]$

پاسخ: قبل از هر چیز، اندیس های سیگما ها باید بر حسب  $n$  باشند نه  $i$ .

در مرحله اول بازه میانی به صورت  $\left[ \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} \right]$  می باشد.

در مرحله دوم، بازه مرحله ی قبل از هر کدام از دو طرف به اندازه  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$  فشرده میشود. یعنی به طرف چپ بازه  $\frac{1}{3^2}$  افزوده و از طرف راست آن  $\frac{1}{3^2}$

کاسته می شود لذا بازه به صورت  $\left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}, 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} \right]$  در می آید.

در مرحله سوم بازه مرحله ی قبل از هر کدام از دو طرف به اندازه  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$  فشرده میشود. یعنی  $\left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}, 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} \right]$

و این روند به همین ترتیب ادامه دارد. تا اینکه در مرحله ی هفتم بازه به صورت زیر در می آید:

$$\left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}, 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^7} \right]$$

که اگر بخواهیم آن را با نماد سیگما بنویسیم به صورت  $\left[ \sum_{n=1}^7 \frac{1}{3^n}, 1 - \sum_{n=1}^7 \frac{1}{3^n} \right]$  خواهد بود و در نتیجه هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.



۱۲- با توجه به شکل زیر اگر  $b_n$  تعداد پاره خط های شکل  $n$  ام باشد

کدام گزینه است؟

(۱)  $3(2^{1395} - 1)$     
 (۲)  $3(2^{1394} - 1)$     
 (۳)  $2^{1394} - 1$     
 (۴)  $2^{1395} - 1$

پاسخ: جملات دنباله به صورت  $1, 3, 9, 21, \dots$  می باشد. که می توان آن را به صورت  $3 \times 1, 3 \times 3, 3 \times 7, \dots$  نوشت. یعنی در این دنباله ۳ در تمام جملات دنباله ی  $1, 3, 7, \dots$  ضرب شده است.

از طرفی اگر به تمام جملات دنباله ی اخیر یک واحد اضافه کنیم دنباله ی  $1, 2, 4, 8, \dots$  یعنی  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$  بدست می آید.

لذا می توان گفت دنباله  $1, 3, 7, \dots$  به صورت  $1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots$  بوده و در نتیجه دنباله ی اصلی در سوال به صورت

$3 \times (2^0 - 1), 3 \times (2^1 - 1), 3 \times (2^2 - 1), 3 \times (2^3 - 1), \dots$  می باشد که جمله ی عمومی آن  $b_n = 3(2^{n-1} - 1)$  است.

در نتیجه جمله ی ۱۳۹۵ آن برابر است با:  $b_{1395} = 3 \times (2^{1394} - 1)$  در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.



۱۳- عدد ۱۰۰ را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم به نحوی که یکی واسطه هندسی دو تای دیگر است و یکی نیز مجموع دو تای دیگر است. عدد کوچکتر

کدام گزینه است؟

(۱)  $\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$     
 (۲)  $\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{2}$     
 (۳)  $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{2}$     
 (۴)  $\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$

پاسخ: متاسفانه کلمه ی "مساوی" در این سوال بیجا می باشد و باید از سوال حذف شود.

آن سه قسمت را  $a, b, c$  می نامیم بطوری که  $a$  کوچکترین و  $c$  بزرگترین عدد باشد. لذا طبق شرایط مسئله می توان نوشت:

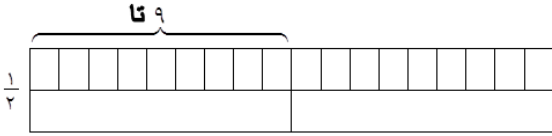
$$ac = b^2 \quad \text{و} \quad a + b = c \quad \text{و} \quad a + b + c = 100$$

$$\Rightarrow c = 50, \quad a + b = 50 \Rightarrow b = 50 - a \xrightarrow{\text{در } ac = b^2} 50 \cdot a = (50 - a)^2 \Rightarrow a^2 - 150 \cdot a + 2500 = 0$$

هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.  $\Delta \rightarrow a = 75 \pm 25\sqrt{5} \xrightarrow{a > 0} a = 75 + 25\sqrt{5} \Rightarrow$

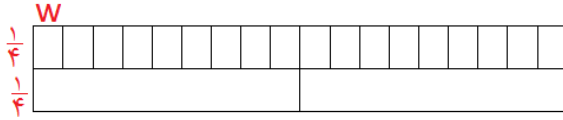


۱۴- یک مستطیل را مطابق رو به رو به ۲۰ مستطیل تقسیم کرده ایم اگر همه، ۲۰ مستطیل با یکدیگر و نیز با مستطیل اصلی متشابه باشند نسبت طول به عرض



مستطیل اصلی چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴) ۲



پاسخ: شکل را به صورت رو به رو در نظر بگیرید.

نسبت طول به عرض مستطیل کوچک  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4W}$  می باشد. همچنین نسبت طول به عرض بزرگترین مستطیل  $\frac{18W}{1/2} = 36W$  است. که بنا به متشابه بودن

آنها این دو نسبت با هم برابرند:  $\frac{1}{4W} = 36W \Rightarrow W^2 = \frac{1}{4 \times 36} \Rightarrow W = \frac{1}{12}$

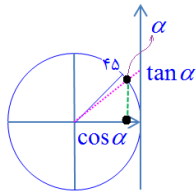
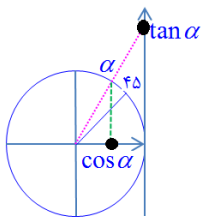
بنابراین نسبت طول به عرض مستطیل اصلی (بزرگترین مستطیل) برابر است با  $3 = 36 \times \frac{1}{12} = 3$  گزینه ی ۱ صحیح است.



۱۵- در مثلث  $ABC$ ، طول اضلاع برابر  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  و  $\cos \alpha$  است اگر بدانیم که  $\sin \alpha < \tan \alpha < \cos \alpha$ ،  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4}$

مقادیر ممکن  $\alpha$  در چه بازه ای قرار می گیرد؟

- (۱)  $0^\circ < \alpha < 30^\circ$  (۲)  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$  (۳)  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$  (۴)  $45^\circ < \alpha < 60^\circ$



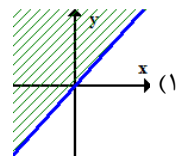
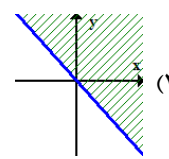
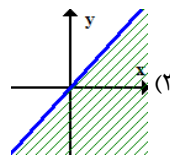
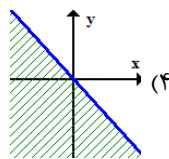
پاسخ: در همسایگی زاویه ی ۴۵ درجه  $\tan \alpha > \cos \alpha$  می باشد

(این موضوع به وضوح روی دایره ی مثلثاتی مشهود است)

پس مقادیری بیشتر یا کمتر از این زاویه قابل قبول نیستند یعنی هر سه گزینه ی ۲ و ۳ و ۴ نادرستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.



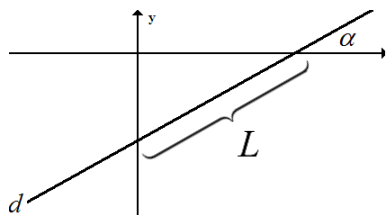
۱۶- اگر  $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$  آنگاه  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار می گیرد؟



پاسخ: زاویه ۹۰ درجه در این نامساوی صدق نمی کند (گزینه های ۱ و ۲ رد می شوند) ولی زاویه ی ۱۸۰ درجه در این نامساوی صدق می کند (گزینه ۳ رد می

شود) لذا گزینه ۴ صحیح است.

۱۷- در شکل روبه رو، خط  $d$  با محور  $x$  زاویه  $\alpha$  می سازد و طول پاره خط مشخص شده در شکل  $L$  است. معادله خط  $d$  کدام است؟



(۱)  $y = L \sin \alpha - (\tan \alpha)x$

(۲)  $y = L \sin \alpha + (\tan \alpha)x$

(۳)  $y = L \tan \alpha - (\sin \alpha)x$

(۴)  $y = L \tan \alpha + (\sin \alpha)x$

پاسخ: نقطه  $A(x, 0)$  روی شکل مشخص شده است. واضح است که:  $x = L \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{x}{L}$

بنابراین  $A(L \cos \alpha, 0)$  است.

از طرفی شیب خط برابر  $\tan \alpha$  می باشد. لذا معادله ی خط به صورت  $y - 0 = \tan \alpha(x - L \cos \alpha)$  است که می توان آن را به شکل زیر ساده کرد:

هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.  $y = (\tan \alpha)x - L \sin \alpha \Rightarrow y = (\tan \alpha)x - L \sin \alpha$



۱۸- اگر  $135^\circ < x < 180^\circ$  باشد ساده شده عبارت  $|\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}| - |\sin x - 1|$ :

(۴)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

(۱)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

پاسخ: طبق شکل روبرو  $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  است. بنابراین هر دو عبارت درون قدر مطلق ها منفی هستند.

و برای این که قدر مطلق را برداریم باید در منفی ضرب شوند:

گزینه ی ۳ صحیح است  $\Rightarrow -\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$  عبارت



۱۹- اگر  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$  ،  $x + y + z = 6$  مقدار  $x y z$  چقدر است؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: توجه: یاد آوری می کنم (اتحاد شرطی اولر): اگر  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a + b + c = 0$

بنابراین می توان نوشت:

$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0 \Rightarrow x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz} \xrightarrow{x+y+z=6} 3\sqrt[3]{xyz} = 6 \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} = 2 \Rightarrow xyz = 8 \Rightarrow$

گزینه ی ۴ صحیح است.

۲۰- اتحاد مقابل برای سه عدد  $a$  و  $b$  و  $c$  که  $b < c < 0$  و  $(ax - y)^2 + (bx + cy)^2 = 65x^2 + 5y^2 + 20xy$  برقرار است.

مقدار  $a$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۲ (۴)

پاسخ: با توجه به فرض سوال داریم:

$$a^2x^2 + y^2 - 2axy + b^2x^2 + c^2y^2 + 2bcxy = 65x^2 + 5y^2 + 20xy$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)x^2 + (c^2 + 1)y^2 + (2bc - 2a)xy = 65x^2 + 5y^2 + 20xy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 65 \\ c^2 + 1 = 5 \Rightarrow c^2 = 4 \xrightarrow{c < 0} c = -2 \\ 2bc - 2a = 20 \xrightarrow{c = -2} -4b - 2a = 20 \xrightarrow{\div 2} -2b - a = 10 \Rightarrow a = -2b - 10 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 65 \xrightarrow{a = -2b - 10} 5b^2 + 40b + 35 = 0 \xrightarrow{\div 5} b^2 + 8b + 7 = 0$$

غیر قابل قبول زیرا باید طبق فرض  $b < c = -2$  باشد.  $b = -1 \rightarrow$

$$b = -1 \xrightarrow{a = -2b - 10} a = 4 \Rightarrow \text{گزینه ی ۱ صحیح است.}$$

این پاسخنامه توسط بنده ی حقیر افشین ملاسعیدی دبیر ریاضی شهرستان آبادان نوشته شده است.

و متأسفانه باید به عرض برسانم که:

از بین ۲۰ سوال ۶ سوال غلط بوده یا در گزینه ها جواب آنها داده نشده است. (سوال ۴ و ۸ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷)

امید آن دارم که مسئولین طرح سوال در آزمون های بعدی دقت بیشتر و شایسته ای داشته تا چنین مواردی تکرار نشود.

<https://telegram.me/Salehin95math>