گروه علمی آموزشگاه

دانشگاه

آدرس: میدان انقلاب، ابتدای خیابان کارگر جنوبی

تلفن: ۶۶۹۵۹۸۳۵ همراه: ۰۹۳۵۶۰۰۸۴۵۴

مدیریت و نظارت علمی مستمر:

دکتر علیرضا نورالدینی

کلاس‌های خصوصی، نیمه خصوصی و گروهی ویژه:

- کنکورهای سراسری
- دروس دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
- دروس دانشگاهی در تمام رشته‌ها

قوی‌ترین درسنامه‌های دروس دبیرستان

(ریاضی دوم)

تابع لگاریتمی

مؤلف: دکتر علیرضا نورالدینی

تابع لگاریتمی

مؤلف این مجموعه: دکتر علیرضا نورالدینی
تاریخ انتشار: ۲۴ بهمن‌ماه ۱۳۹۱

بخش اول:

معرفی تابع لگاریتمی

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم تابع نمایی

$$y=a^{x}\,,\qquad (a>۰,\ a\neq ۱)$$

تابعی یک‌به‌یک است و در نتیجه - چنان‌که می‌دانیم - این تابع معکوس‌پذیر خواهد بود. معکوس این تابع را **تابع لگاریتمی** گویند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y=\log_{a}x,\qquad (a>۰,\ a\neq ۱)$$

در این تابع، عدد a **مبنا** یا **پایه‌ی** لگاریتم است که همواره مثبت و مخالف ۱ می‌باشد.

نکته. با توجه به مطالب فوق، تابع لگاریتمی و خصوصیات آن و ارتباطش با تابع نمایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\log_{a}:(۰,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad \log_{a}y=x\Leftrightarrow a^{x}=y$$

در واقع، دامنه‌ی تابع لگاریتمی تمام اعداد مثبت و برد آن تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

مثال. در هر یک از موارد زیر، تساوی داده شده را به زبان لگاریتم یا نمایی بنویسید:

الف) $۳۲=۲^{۵}$

پاسخ: $\log_{۲}۳۲=۵$

ب) $۸^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۸}$

پاسخ: $\log_{۸}\sqrt[۵]{۸}=\frac{۱}{۵}$

ج) $\log_{۱۰}۰/۰۰۰۱=-۴$

پاسخ: $۱۰^{-۴}=۰/۰۰۰۱$

مثال. مقدار t را از رابطه‌های زیر بیابید.

الف) $\log_{۶۴}۲۵۶=۱-۲t$

ب) $\log_{۰/۲}(\log_{۴}(\log_{۳}(-t+۱)))=-۱$

روش حل. تساوی داده شده در قسمت (الف) را به زبان نمایی می‌نویسیم:

$$۶۴^{۱-۲t}=۲۵۶\ \to\ (۲^{۶})^{۱-۲t}=۲^{۸}\ \to\ ۲^{۶-۱۲t}=۲^{۸}\ \to\ ۶-۱۲t=۸\ \Rightarrow\ t=-\frac{۱}{۶}$$

برای پاسخ‌گویی به قسمت (ب) نیز کافی است چند بار از تعریف لگاریتم استفاده کنیم:

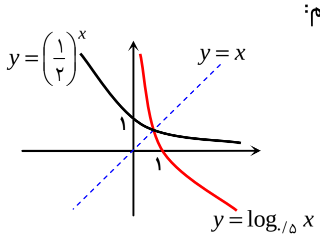
$$\log_{۰/۲}(\log_{۴}(\log_{۳}(-t+۱)))=-۱\ \to\ \log_{۴}(\log_{۳}(-t+۱))=۰/۲^{-۱}=(\frac{۱۰}{۲})^{۱}=۵$$

$$\to\ \log_{۳}(-t+۱)=۴^{۵}=۱۰۲۴$$

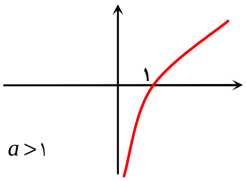
$$\to\ -t+۱=۳^{۱۰۲۴}\ \Rightarrow\ t=۱-۳^{۱۰۲۴}$$

مثال. با استفاده از نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$، نمودار تابع $y=\log_{۰/۵}x$ را رسم کنید.

روش حل. چون تابع $y=\log_{0.5} x$ معکوس تابع نمایی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ است، کافی است نمودار این تابع را رسم کنیم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم (یعنی خط $y=x$) رسم کنیم:



نتیجه. با توجه به مثال بالا و در کل، ارتباط بین نمودار یک تابع و نمودار معکوس آن، نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ با توجه به پایه‌ی آن همواره به یکی از دو صورت زیر است:



توجه داشته باشید که نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ همواره از نقطه‌ی $(1,0)$ عبور می‌کند.

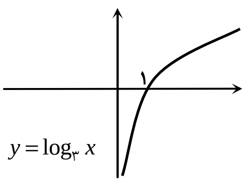
مثال. نمودار هر یک از توابع زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید:

الف) $y=\log_3 x-2$

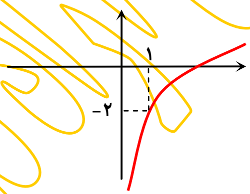
ب) $y=\log_3(x-2)$

ج) $y=2-\log_{0.2}(x+3)$

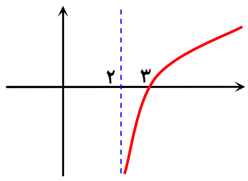
روش حل. ابتدا نمودار تابع $y=\log_3 x$ را رسم می‌کنیم و سپس با انتقال مربوطه، نمودارهای (الف) و (ب) رسم می‌شوند:



$\Rightarrow$



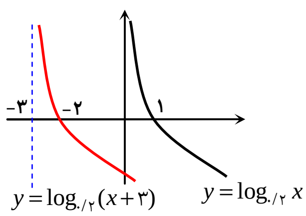
شکل (الف)



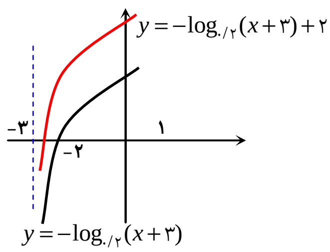
شکل (ب)

توجه کنید که وقتی نمودار لگاریتمی بصورت افقی منتقل می‌شود، خطی موازات محور y و به همان فاصله از نمودار رسم می‌کنیم تا جهت حرکت منحنی را به خوبی نشان دهد.

برای رسم نمودار قسمت (ج)، ابتدا $y=\log_{0.2} x$، بعد نمودار $y=\log_{0.2}(x+3)$، بعد نمودار $y=-\log_{0.2}(x+3)$ و در پایان نمودار $y=-\log_{0.2}(x+3)+2$ را رسم می‌کنیم.



$\Rightarrow$



نمادهای استاندارد

در مورد مبنای لگاریتم دو حالت خاص زیر وجود دارد:

- اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، به آن **لگاریتم اعشاری** گویند و معمولاً برای راحتی از نوشتن مبنـای ۱۰ خـودداری می‌شود:

$$\log x = \log_{۱۰} x$$

- اگر مبنای لگاریتم عدد شناخته شده‌ی $e \cong ۲/۷۱۸$ باشد، به آن **لگاریتم طبیعی** گویند و آن را با $\ln$ نشان می‌دهند:

$$\ln x = \log_e x$$

(عدد e مانند عدد π در علوم مختلف بسیار کاربرد دارد که در سال‌های بعد بیشتر با آن آشنا خواهید شد.)

نکته. با استفاده از نمودارهای استاندارد تابع لگاریتمی در دو حالت $a > ۱$ و $۰ < a < ۱$ خواص بسیار مهم زیر بدست می‌آیند:

- لگاریتم عدد ۱ در هر مبنایی برابر صفر است:

$$\log_a ۱ = ۰$$

- اگر $a > ۱$ باشد، آنگاه:

$$\log_a x_۱ < \log_a x_۲ \iff x_۱ < x_۲$$

- اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آنگاه:

$$\log_a x_۱ < \log_a x_۲ \iff x_۱ > x_۲$$

در تمام این موارد باید توجه داشته باشید که اعداد $x_۱$ و $x_۲$ باید مثبت باشند!

به‌ویژه، موارد زیر از اهمیت خاصی برخوردار هستند:

$$۰ < a < ۱: \begin{cases} \log_a x > ۰ \iff ۰ < x < ۱ \\ \log_a x < ۰ \iff x > ۱ \end{cases} \qquad a > ۱: \begin{cases} \log_a x > ۰ \iff x > ۱ \\ \log_a x < ۰ \iff ۰ < x < ۱ \end{cases}$$

مثال. نامعادله‌ی $\log_{۰/۲۵}(۱ + x - x^۲) \leq ۰$ را حل کنید.

روش حل. با توجه به دو حالت خاص بالا:

$$\log_{۰/۲۵}(۱ + x - x^۲) \leq ۰ \rightarrow ۱ + x - x^۲ \geq ۱ \rightarrow x - x^۲ \geq ۰$$

نامعادله‌ی اخیر توسط تعیین علامت حل می‌شود:

x		-۱		۰	
$x - x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$x - x^۲ = ۰ \rightarrow x(۱ - x) = ۰ \Rightarrow x = ۰,\ x = ۱$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی بسته‌ی $[-۱, ۰]$ است.

توجه. در صورتی که مبنای لگاریتم متغیر باشد، مانند $\log_{q(x)} p(x)$، دامنه عبارت است از:

$$\{x:\ p(x) > ۰,\ q(x) > ۰,\ q(x) \neq ۱\}$$

مثال. دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{\log_{۰/۳} \dfrac{۵x - x^۲}{۴}}$ ب) $y = \log_{۱+x}(۴ - x^۲)$

روش حل. در مورد تابع قسمت (الف) می‌توان نوشت: $\log_{۰/۳} \dfrac{۵x - x^۲}{۴} \geq ۰$. چون مبنا از ۱ کوچک‌تر است با توجه به نکتـه‌ی گفتـه شده:

$$۰<\frac{۵x-x^{۲}}{۴}\leq ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۰<۵x-x^{۲}\leq ۴$$

بنابراین باید هر دو نامعادله‌ی $۰<۵x-x^{۲}$ و $۵x-x^{۲}\leq ۴$ را از روش تعیین علامت حل کرده و بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$$\begin{cases} ۰<۵x-x^{۲} \rightarrow ۰<x<۵ \\ ۵x-x^{۲}\leq ۴ \rightarrow ۱\leq x\leq ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱\leq x\leq ۴$$

پس دامنه‌ی تابع بازه‌ی بسته‌ی $[۱,۴]$ است. در مورد مورد (ب) چنان‌که گفته شد، لازم است سه شرط برقرار باشد:

$$\begin{cases} ۴-x^{۲}>۰ \rightarrow x^{۲}<۴ \Rightarrow -۲<x<۲ \\ ۱+x>۰ \rightarrow x>-۱ \\ ۱+x\neq ۱ \rightarrow x\neq ۰ \end{cases}$$

با اشتراک‌گیری از سه جواب بدست آمده، دامنه برابر می‌شود با مجموعه‌ی $(-۱,۲)-\{۰\}$.

بخش دوم:

ویژگی‌های لگاریتم

مفهوم لگاریتم، دارای خواص بسیار مهمی است که توسط آن‌ها محاسبات عددی با سهولت بیشتری انجام می‌شوند. به عنوان نمونه به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال. نشان دهید که برای دو عدد مثبت x و y همواره داریم:

الف) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

ب) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

روش حل. فرض کنید $\log_a x=t$ و $\log_a y=s$ باشند. در این صورت، $x=a^t$ و $y=a^s$ که از ضرب طرفین این دو تساوی در یکدیگر داریم:

$$xy=a^t a^s \rightarrow xy=a^{t+s} \Rightarrow \log_a(xy)=t+s,$$

و به عبارت دیگر $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ که اثبات قسمت (الف) است. اثبات قسمت (ب) به‌طریق کاملاً مشابه است و به عنوان تمرین به عهده‌ی دانش‌آموزان است!

مثال. نشان دهید که برای هر عدد مثبت x و هر عدد حقیقی r داریم:

- $\log_a x^r=r\log_a x$
- $\log_{a^r} x=\frac{۱}{r}\log_a x$

روش حل. فرض کنید $\log_a x=t$ باشد. در این‌صورت طبق تعریف لگاریتم:

$$x=a^t \rightarrow x^r=(a^t)^r \rightarrow x^r=a^{rt} \Rightarrow \log_a x^r=rt,$$

و به عبارت دیگر، $\log_a x^r=r\log_a x$. برای اثبات ادعای دوم می‌نویسیم:

$$\log_a x=t \rightarrow x=a^t \rightarrow x^r=a^{tr} \rightarrow x^r=(a^r)^t \rightarrow \log_{a^r} x^r=t \Rightarrow \log_{a^r} x^r=\log_a x$$

با استفاده از خاصیت اولی که اثبات کردیم داریم $r\log_{a^r} x=\log_a x$ و لذا با تقسیم دو طرف بر r حکم ثابت می‌شود.

نکته. همواره داریم $\log_a a=۱$، یعنی لگاریتم هر عدد مثبت (غیر از ۱) در مبنای خودش برابر ۱ است. (چرا؟)

مثال مهم. نشان دهید تساوی زیر برقرار است:

$$\log ۲+\log ۵=۱$$

روش حل. چون $۱۰=۲\times ۵$، با گرفتن لگاریتم از دو طرف داریم:

$$\log(۲\times۵)=\log(۱۰)\ \rightarrow\ \log۲+\log۵=۱$$

توجه داشته باشید که با توجه به این تساوی، از این پس هرگاه لگاریتم یکی از اعداد ۲ یا ۵ را داشته باشیم، لگاریتم عدد دیگر قابل تعیین است.

توجه. یکی از کاربردهای مهم ویژگی‌هایی که ذکر شد، محاسبه‌ی لگاریتم اعداد مختلف است. برای این منظور، معمولاً مراحل زیر انجام می‌شوند:

- پایه‌ی عدد یا عددهای داده شده را تجزیه کنید.
- با استفاده از خواص اعداد توان‌دار، آن را به صورت ضرب یا تقسیم اعداد توانی بنویسید.
- خواص لگاریتم را در مورد آن بکار ببرید.
- مقادیر داده شده را جایگزین کنید تا عدد خواسته شده بدست آید.

مثال. فرض کنید $\log۲=m$ و $\log۳=n$ و توسط آن، $\log۶۰۰$ را بر حسب m و n بیان کنید.

روش حل. تجزیه‌ی عدد ۶۰۰ عبارت است از $۲^۳\times۳\times۵^۲$. در نتیجه:

$$\log(۲^۳\times۳\times۵^۲)=\log۲^۳+\log۳+\log۵^۲=۳\log۲+\log۳+۲\log۵=۳m+n+۲(۱-m)=m+n+۲$$

توجه کنید که با استفاده از نکته‌ی گفته شده $\log۵=۱-\log۲=۱-m$ که از آن استفاده کرده‌ایم.

مثال. مقدار عددی $\log_{\frac{۱}{۳۲}}۳۲+\log_{۳\sqrt[۳]{۳}}\sqrt{۲۷}$ را تعیین کنید.

روش حل. با استفاده از خواص گفته شده:

$$\log_{۲^{-۵}}۲^۵+\log_{۳\times۳^{\frac{۱}{۳}}}۳^{\frac{۳}{۲}}=\log_{۲^{-۵}}۲^۵+\log_{۳^{\frac{۴}{۳}}}۳^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{-۵}\times۵\log_۲۲+\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}\times\frac{۳}{۲}\log_۳۳=-\log_۲۲+\frac{۹}{۸}\log_۳۳=-۱+\frac{۹}{۸}=\frac{۱}{۸}$$

مثال. اگر $\log_b a=m$ باشد، $\log_{\sqrt[۳]{b}}a^۵b$ را بر حسب m بیان کنید.

روش حل. از خواص لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt[۳]{b}}a^۵b=\log_{b^{\frac{۱}{۳}}}a^۵b=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}\log_b a^۵b=۳(\log_b a^۵+\log_b b)$$

چون $\log_b b=۱$ و $\log_b a^۵=۵\log_b a=۵m$، با جایگذاری داریم:

$$\log_{\sqrt[۳]{b}}a^۵b=۳(۵m+۱)=۱۵m+۳$$

تست. اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $\left(\frac{۱}{A}-۱\right)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

۱) ۳-   ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ **(کنکور سراسری سال ۱۳۹۰)**

روش حل. با توجه به فرض داده شده داریم:

$$A=\log_۸ ۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\log_{۲^۳}۲\sqrt[۳]{۲^{-۲}}=\log_{۲^۳}۲\times۲^{-\frac{۲}{۳}}=\log_{۲^۳}۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\log_۲۲=\frac{۱}{۹}$$

اکنون با جایگذاری در عبارت $\frac{۱}{A}-۱$ داریم:

$$\log_۴\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۹}}-۱\right)=\log_۴(۹-۱)=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه **گزینه‌ی ۴** صحیح است.

نکته. (سایر ویژگی‌های لگاریتم)

موارد زیر نیز در مورد لگاریتم برقرار هستند که آن‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

- $\log_a \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$
- $\log_a a^x = x$ و $a^{\log_a x} = x$.
- $\log_c b \times \log_a c = \log_a b$. درنتیجه $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$. به‌خصوص $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

از این رابطه برای **تغییر مبنا** استفاده می‌شود.

مثال. اگر $\log_{12} 3 = k$، آنگاه مقدار $\log_{\sqrt{3}} 16$ را بر حسب k تعیین کنید.

روش حل. چون در مقدار خواسته شده‌ی $\log_{\sqrt{3}} 16$ مبنا بر حسب ۳ است، با توجه به فرض:

$$\log_{12} 3 = k \rightarrow k = \frac{1}{\log_3 12} \rightarrow \log_3(2^2 \times 3) = \frac{1}{k} \rightarrow 2\log_3 2 + 1 = \frac{1}{k} \rightarrow 2\log_3 2 = \frac{1}{k} - 1 \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1-k}{2k}$$

بنابراین:

$$\log_{\sqrt{3}} 16 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^4 = 4 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 2 = 4 \times 2 \times \frac{1-k}{2k} = \frac{4-4k}{k}$$

بخش سوم:

معادله‌های لگاریتمی

در بخش اول دیدیم که نمودار تابع لگاریتمی یا صعودی ($a > 1$) و یا نزولی (برای $0 < a < 1$) است. در نتیجه این تابع همواره یک‌به‌یک است. بنابراین خاصیت مهم زیر در مورد لگاریتم همواره برقرار است:

$$\log_a P = \log_a Q \quad \Rightarrow \quad P = Q$$

نکته. در حل معادلات لگاریتمی چنین عمل می‌کنیم:

- با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، طرفین تساوی را به دو لگاریتم بدون ضریب تبدیل می‌کنیم.
- با استفاده از مطلب بالا، لگاریتم‌ها حذف می‌شوند.
- جواب‌های بدست آمده را در معادله جای x قرار می‌دهیم. شرط قابل قبول بودن یک جواب این است که:

جلوی هیچ لگاریتمی عدد منفی قرار نگیرد!

مثال. در تساوی $\log x = \log\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{25}$ مقدار x را بیابید.

روش حل. با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم:

$$\log x = \log\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{25} = \log\sqrt{2} + \log\sqrt{\frac{2}{25}} = \log\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{25}} = \log\frac{2}{5}$$

از حذف لگاریتم‌ها از دو طرف $x = \frac{2}{5}$ بدست می‌آید که قابل قبول است.

مثال. مجموع جواب‌های معادله‌ی $\log_3(5x-2) = 1 + \log_{\sqrt{3}} x$ را تعیین کنید.

روش حل. مانند مثال قبل عمل می‌کنیم؛ به جای عدد ۱ قرار می‌دهیم $\log_3 3$:

$$\log_3(5x-2) = \log_3 3 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} x = \log_3 3 + 2\log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x^2 = \log_3 3x^2$$

در نتیجه $3x^2 = 5x - 2$ و یا $3x^2 - 5x + 2 = 0$. این معادله دو ریشه دارد که هر دو قابل قبول هستند. ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، یعنی ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{2}{3}$ می‌باشد.

سخنی با شما:

دانش‌آموز عزیز، هدف از تهیه‌ی این مجموعه‌ها عمق بخشیدن به یادگیری و کمکی هر چند ناچیز به ارتقای سطح علمی شما آینده‌ساز ایران عزیز می‌باشد.

برای نیل به این اهداف، خواهشمند است موارد زیر را رعایت کنید:

- **درسنامه‌ی فوق را به دقت و با حوصله‌ی تمام مطالعه کنید. تعاریف و نکات گفته شده را در قالب مثال‌های مربوطه ضمن درک کامل، همواره در خاطر داشته باشید.**
- **توجه داشته باشید که مرحله‌ی قبل اگر به درستی انجام شود، نهایتاً ۵۰ تا ۷۰ درصد یادگیری صورت پذیرفته است. برای تکمیل این فرآیند، لازم است به تک‌تک تمریناتی که در پی می‌آید زمان مناسب را تخصیص داده و در صورت وجود مشکل در برخی از آن‌ها، از افراد مسلط در این زمینه، تنها راهنمایی جزیی طلب کنید.**

با آرزوی موفقیت‌های علمی بی‌پایان شما

دکتر علیرضا نورالدینی

بخش سوم:

تمرینات تابع لگاریتمی

۱- تساوی‌های زیر را به‌صورت لگاریتم بنویسید:

- $2^{-5} = \frac{1}{32}$
- $16^{\frac{1}{2}} = 4$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3$

۲- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

- $y = -1 + \log_{\frac{1}{2}} x$
- $y = \log_2(x+3) - 3$

۳- هر عبارت را تا حد ممکن محاسبه کنید.

- $\log_7 \sqrt[5]{49} - \log_2 \sqrt[3]{16}$
- $\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\sqrt{2}} 64 - \log_{\sqrt{11}} 121$
- $\log_4 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{8}}(2)$
- $\dfrac{\log 8 + 2\log 2}{5\log 2 - \log 64}$
- $\log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3}) - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{125}$
- $|\log_{\frac{1}{2}} 8| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$

۴- هرگاه $\log 2 = m$ و $\log_3 n$، مقدار $\log \sqrt[5]{360}$ را بیابید.

۵- معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.

- $\log x = \log(x+3) + \log(x-3) - 3\log 2$
- $\log(x^2 - 7) = 2\log(x+3)$
- $\log_t 3 + \log_t(2t+9) = 2$

۶- مقدار t را از تساوی‌های زیر بدست آورید.

- $\log_2(\log_3(5-t)) = 2$
- $\log_2\left(1 + \log_3\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)\right) = 1$

۷- نامعادله‌های زیر را حل کنید:

- $\log \frac{x+3}{5} > -1$
- $\log_{\frac{1}{9}} \frac{x-1}{3} < \log_{\frac{1}{2}} 2$

۸- دامنه‌ی هر تابع را مشخص کنید:

- $y = \log (x-2)^2$
- $y = 2\log (x-2)$

۹- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_2 (x+y) = 3 \\ \log_3 (x-y) = 1 \end{cases}$$

۱۰- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$ را بر حسب k مشخص کنید.

۱۱- اگر $\log_{12} 27 = m$ باشد، مقدار $\log_6 16$ را بر حسب m بیابید.

۱۲- اگر $\log(x-4) = 2\log 2 - \log(x-2)$ مقدار $\log_5 (x-3)$ را بیابید.

۱۳- اگر $\log_6 15 = m$ و $\log_{12} 18 = n$ باشند، مقدار $\log_{25} 24$ را بر حسب m و n بیابید.

۱۴- حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$9^{(1-\log_3 2)} + 5^{2\log_5 3}$$

۱۵- اگر $\log_3 2 = m$ باشد، مقدار $\log_{72} 48$ را بر حسب m بیابید.

۱۶- حاصل $\log_2 6 \times \log_4 8 \times \log_6 16 \times 4^{\log_4 3}$ را تعیین کنید.

قوی‌ترین درسنامه‌های دروس دبیرستان

(ریاضی دوم)

تابع نمایی

مؤلف: دکتر علیرضا نورالدینی

تابع نمایی

مؤلف این مجموعه: دکتر علیرضا نورالدینی

تاریخ انتشار: ۱۰ بهمن‌ماه ۱۳۹۱

بخش اول:

معرفی تابع نمایی

تعریف. فرض کنید a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد. تابعی که ضابطه‌ی آن به صورت

$$y = a^x$$

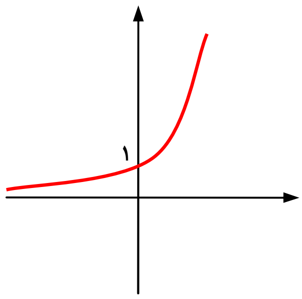
باشد، تابع نمایی با پایه‌ی a نامیده می‌شود.

مثال. نمودار تابع نمایی $f(x) = 2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

روش حل. همان‌طور که به آسانی فهمیده می‌شود، به جای x هر عدد مثبت یا منفی می‌توان قرار داد:

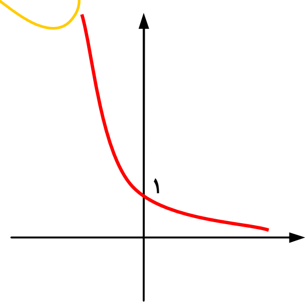
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

با قرار دادن نقاط در دستگاه مختصات، نمودار این تابع رسم می‌شود.



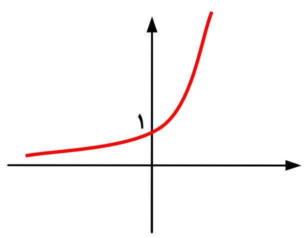
مثال. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را رسم کنید.

روش حل. مانند مثال قبل، جدولی از نقاط تابع مشخص می‌کنیم و سپس نمودار تابع رسم می‌شود:

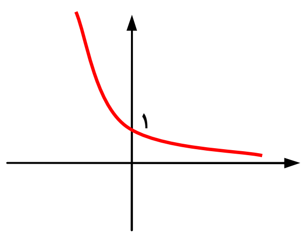


x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

نکته. نمودار تابع نمایی $y = a^x$ در حالت کلی بر حسب این‌که $a > 1$ و یا $0 < a < 1$ همواره به یکی از دو صورت زیر است:



$a > 1$



$0 < a < 1$

بویژه:

- تابع نمایی $y=a^x$ برای $a>۱$ صعودی است:

$$s<t \quad \Leftrightarrow \quad a^s<a^t$$

- تابع نمایی $y=a^x$ برای $۰<a<۱$ نزولی است:

$$s<t \quad \Leftrightarrow \quad a^s>a^t$$

نتایج. با استفاده از نمودارهای بالا، موارد مهم ذیل فهمیده می‌شود:

- دامنه‌ی تابع نمایی مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد مثبت $(۰,+\infty)$ است، یعنی:

$$f:\ \mathbb{R}\xrightarrow[y=a^x]{}(۰,+\infty)$$

- چون $a^{۰}=۱$، نمودار تابع نمایی همواره از نقطه‌ی $(۰,۱)$ عبور می‌کند.

مثال. محدوده‌ی m را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\frac{۱-۲m}{m+۱}\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

روش حل. برای این‌که تابع داده شده نمایی باشد لازم است که دو شرط

$$\frac{۱-۲m}{m+۱}\neq ۱ \quad و \quad \frac{۱-۲m}{m+۱}>۰$$

برقرار باشند. پس هر دو نامعادله را حل می‌کنیم و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

- $\frac{۱-۲m}{m+۱}>۰ \ \rightarrow\ -۱<m<\frac{۱}{۲}$
- $\frac{۱-۲m}{m+۱}\neq ۱ \ \rightarrow\ m\neq ۰$

پس محدوده‌ی مورد نظر عبارت است از $(-۱,۰)\cup(۰,\frac{۱}{۲})$.

تمرین. محدوده‌ی m را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه‌ی $y=\left(\frac{۱-۲m}{m+۱}\right)^x$ یک تابع نمایی نزولی باشد.

تذکر مهم. تمام ویژگی‌های تابع نمایی را می‌توان از روی دو نمودار کلی گفته شده استخراج کرد. بنابراین نمودار این تابع را باید همواره در ذهن داشت!

توجه. همواره داریم: $a^{-x}=\left(\frac{۱}{a}\right)^x$؛ مثلاً تابع $y=۳^{-x}$ همان تابع نمایی $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ است. به همین صورت، تابع نمایی $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-x}$ همان تابع $y=۲^x$ می‌باشد.

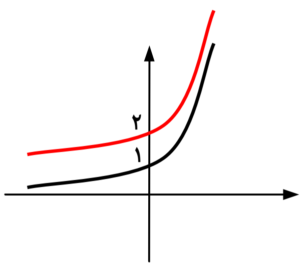
مثال. نمودار تابع‌های زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید:

الف) $y=۲^x+۱$

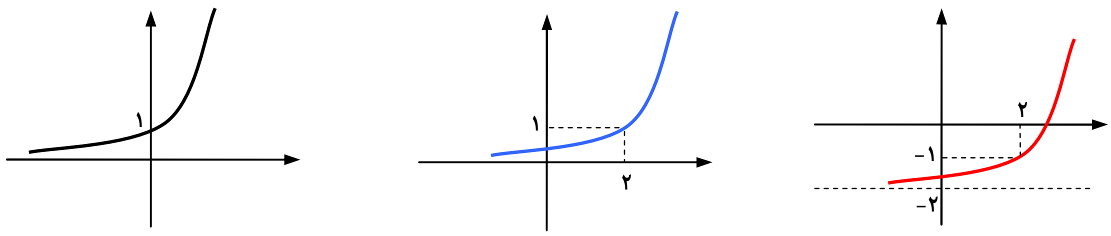
ب) $y=۳^{x-۲}-۲$

ج) $y=\dfrac{\left(\frac{۲}{۷}\right)^x}{۳^{-x}}$

روش حل. (الف) ابتدا نمودار $y=۲^x$ رسم می‌شود و سپس نمودار ۱ واحد به بالا انتقال می‌یابد:



ب) ابتدا نمودار $y=۳^x$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار ۲ واحد به راست می‌رود ($y=۳^{x-۲}$) و در پایان نمودار ۲ واحد بـه پـایین منتقل می‌شود ($y=۳^{x-۲}-۲$):



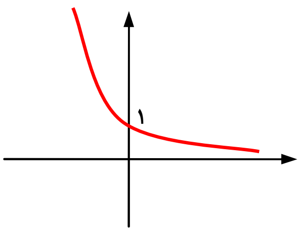
$y=۳^x$ $y=۳^{x-۲}$ $y=۳^{x-۲}-۲$

نکته. *وقتی نمودار تابع نمایی به بالا یا پایین انتقال می‌یابد، به همان نسبت خطی موازی محور xها رسـم مـی‌شـود کـه مسیر حرکت نمودار کاملاً مشخص باشد. به این خط، مجانب نمودار گویند!*

ج) ابتدا با استفاده از قوانین توان‌ها تابع را به فرم استاندارد تابع توانی تبدیل می‌کنیم:

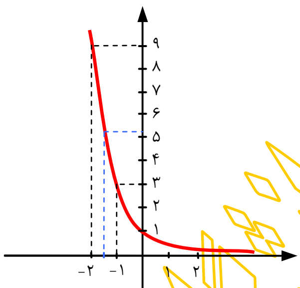
$$y=\frac{\left(\frac{۲}{۷}\right)^x}{۳^{-x}}=\frac{\left(\frac{۲}{۷}\right)^x}{\left(\frac{۱}{۳}\right)^x}=\left(\frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{۱}{۳}}\right)^x=\left(\frac{۶}{۷}\right)^x$$

در نتیجه نمودار این تابع به شکل مقابل است:



مثال. نمودار تابع $y=۳^{-x}$ را با نقطه گذاری در محدوده‌ی $-۲<x<۲$ رسم کنید و توسط آن مقدار $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱/۵}$ را به طـور تقریبـی تعیین کنید.

روش حل. چون $۳^{-x}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$، نمودار تابع نمـایی $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ را بـا تـشکیل جدول مقادیر رسم می‌کنیم:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$

با توجه به نمودار تابع که رسم کردیم، مقدار تقریبی عدد $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱/۵}$ برابر ۵/۲ است. جالب است بدانیم کـه مقـدار دقیـق ایـن عدد با استفاده از ماشین حساب مهندسی عدد ۵/۱۹۶ بدست می‌آید.

تذکر. فقط توابعی رفتار نمایی دارند که ضابطه‌ی آن‌ها بصورت توانی باشد و متغیر در توان قرار داشته باشد. البته ممکن اسـت ایـن عبارت توان‌دار با عددی جمع و تفریق یا در عددی ضرب شده باشد.

مثال. کدام‌یک از توابع زیر رفتار نمایی دارد؟

الف) $y=۳x^۲+۵$ **ب)** $y=۳\times۲^x+۵$

ج) $y=\frac{۴^x}{۲\times۵^{x-۱}}$ **د)** $y=(۲-x^۲)^۳$

روش حل. با توجه به تذکر بالا، موارد (الف) و (د) نمایی نیستند و تابع قسمت (ب) نمایی است. در مورد تابع (ج) می‌توانیم با استفاده از قوانین توان‌ها بنویسیم:

$$y=\frac{۴^x}{۲\times ۵^{x-۱}}=\frac{۴^x}{۲\times ۵^x\times ۵^{-۱}}=\frac{۵\times ۴^x}{۲\times ۵^x}=\frac{۵}{۲}\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^x \Rightarrow y=\frac{۵}{۲}\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^x$$

در نتیجه این تابع نیز نمایی می‌باشد.

مثال. مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع زیر یک تابع نمایی نزولی باشد:

$$y=(۴-m^۲)x^۲+۳^{(۱-m)x}$$

روش حل. برای این‌که تابع داده شده نمایی باشد، لازم است که عبارت درجه ۲ حذف شود؛ یعنی باید ضریب آن صفر شود:

$$۴-m^۲=۰\to m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm ۲$$

اگر m برابر ۲- باشد، تابع به صورت $y=۳^{۳x}=۲۷^x$ است که صعودی می‌شود. ولی اگر قرار دهیم $m=۲$، خواهیم داشت:

$$y=۳^{(۱-۲)x}=۳^{-x}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$$

که تابعی نمایی و نزولی است.

بخش دوم:

معادلات و نامعادلات نمایی

نکته. در تمام نمودارهای توابع نمایی که رسم کردیم مشاهده می‌شود که هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. در نتیجه تابع نمایی $y=a^x$ همواره یک‌به‌یک است. بنابراین:

$$a^s=a^t \Rightarrow s=t$$

این مطلب کاربرد بسیار مهمی در حل معادلات نمایی دارد.

مثال. معادله‌ی $۱۲۵^{۱-۳x}=\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}}\right)^{۲x}$ را حل کنید.

روش حل. طرفین را توسط قوانین اعداد توان‌دار:

$$a^s\times a^t=a^{s+t},\quad a^s\div a^t=a^{s-t},\quad (a^s)^t=a^{st}$$

به اعداد با پایه‌ی یکسان تبدیل می‌کنیم:

$$(۵^۳)^{۱-۳x}=\left(۵^{-\frac{۱}{۳}}\right)^{۲x}\to ۵^{۳-۹x}=۵^{-\frac{۲}{۳}x}\to ۳-۹x=-\frac{۲}{۳}x \to \frac{۲۵}{۳}x=۳ \Rightarrow x=\frac{۹}{۲۵}$$

مثال. معادله‌ی $۲^{x-۱}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}=۲۰۸$ را حل کنید.

روش حل. از توان کوچک‌تر ۲، یعنی $۲^{x-۱}$ در سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$۲^{x-۱}(۱+۲^۲+۲^۳)=۲۰۸ \to ۲^{x-۱}\times ۱۳=۲۰۸ \to ۲^{x-۱}=\frac{۲۰۸}{۱۳}=۱۶ \to ۲^{x-۱}=۲^۴ \Rightarrow x=۵$$

نکته. چنان که قبلاً نیز گفته شد، در نامعادله‌ی $a^x<a^y$:

- اگر $a>۱$ جواب عبارت است از $x<y$؛ یعنی جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.
- اگر $۰<a<۱$ جواب عبارت است از $x>y$؛ یعنی جهت نامساوی تغییر می‌کند.

تذکر. مانند معادلات نمایی، در حل نامعادلات نمایی نیز در ابتدا باید پایه‌ها را یکسان کرد!

مثال. نامعادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $۴۹^{۲x-۱}>(\sqrt{۷})^{-۴x+۴}$

ب) $(\sqrt{۳-\sqrt{۸}})^{۱-x}\le(\sqrt{۳+\sqrt{۸}})^{۲-۳x}$

روش حل.

(الف) با تبدیل پایه‌ها به عددهای یکسان و استفاده از خواص تابع نمایی داریم:

$$(7^{2})^{2x-1} > (7^{\frac{1}{2}})^{-4x+4} \rightarrow 7^{4x-2} > 7^{-2x+2} \xrightarrow{a>1} 4x-2 > -2x+2 \rightarrow 6x > 4 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

(ب) با توجه به تساوی $3+\sqrt{8} = \frac{1}{3-\sqrt{8}}$ (**چرا؟**) می‌توان نوشت:

$$(\sqrt{3-\sqrt{8}})^{1-x} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}\right)^{2-3x} \rightarrow (\sqrt{3-\sqrt{8}})^{1-x} \le (\sqrt{3-\sqrt{8}})^{-2+3x}$$

$$\xrightarrow{a<1} 1-x \ge -2+3x \rightarrow -4x \ge -3 \Rightarrow x \le \frac{3}{4}$$

سخنی با شما:

دانش‌آموز عزیز، هدف از تهیه‌ی این مجموعه‌ها عمق بخشیدن به یادگیری و کمکی هر چند ناچیز به ارتقای سطح علمی شما آینده‌ساز ایران عزیز می‌باشد.
برای نیل به این اهداف، خواهشمند است موارد زیر را رعایت کنید:

- **درسنامه‌ی فوق را به دقت و با حوصله‌ی تمام مطالعه کنید. تعاریف و نکات گفته شده را در قالب مثال‌های مربوطه ضمن درک کامل، همواره در خاطر داشته باشید.**
- **توجه داشته باشید که مرحله‌ی قبل اگر به درستی انجام شود، نهایتاً ۵۰ تا ۷۰ درصد یادگیری صورت پذیرفته است. برای تکمیل این فرآیند، لازم است به تک‌تک تمریناتی که در پی می‌آید زمان مناسب را تخصیص داده و در صورت وجود مشکل در برخی از آن‌ها، از افراد مسلط در این زمینه، تنها راهنمایی جزیی طلب کنید.**

با آرزوی موفقیت‌های علمی بی‌پایان شما

دکتر علیرضا نورالدینی

بخش سوم:

تمرینات تابع نمایی

۱- کدام‌یک از جدول مقادیر زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۲	۴	۸	۱۶	۳۲

ب)

x	۱-	۰	۱	۲	۳
y	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$

ج)

x	۱-	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$	۳	۶	۱۲

۲- نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ ب) $y=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-x}$

ج) $y=۲\times ۳^{x}-۴$ د) $y=-۳^{x+۲}+۱$

ه) $y=۲\times ۳^{-x+۲}-۲$ و) $y=\dfrac{۲\times ۳^{x}}{\left(\frac{۲}{۷}\right)^{-x}}$

ر) $y=|۳^{x}-۲|$ ز) $y=\sqrt{۲^{۲x+۳}}$

س) $y=\dfrac{۳^{x}-۳^{۲x}}{۱۲^{x}-۲^{۲x}}$

۳- کدام‌یک از توابع زیر رفتار تابع نمایی دارد؟

الف) $y=۳^{۲-x}\times ۵$ ب) $y=(۱-۲x^{۲})^{۳}$

۴- نمودار تابع نمایی $y=(\frac{۱}{۳})^{-x}+۲$ را در محدوده‌ی $-۲<x<۲$ رسم کنید و سپس به کمک نمودار:

- دامنه و برد تابع را مشخص کنید.
- نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور عرض‌ها را تعیین کنید.
- مقدار تقریبی عدد $۳^{-\frac{۱}{۲}}+۲$ را تعیین کنید.

۵- نمودار تابع $y=۴^{x-۲}$ را رسم کنید و سپس توسط آن، مقدار تقریبی عدد $۴^{-\frac{۱}{۲}}$ را مشخص کنید.

۶- معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱-۲x}=۶۴^{\frac{۲x+۴}{۱۲}}$

ب) $\left(\frac{۳\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt{۳}}\right)^{x}=۳^{-x+۲}$

ج) $\left(a\sqrt{a}\right)^{-x}=a^{۲x-۱}$

د) $۹^{x-۱}=۲۷\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱-۲x}$

۷- معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $۸^{۱-x}-۴\times ۲^{۷+۲x}+۴۱=-۲۳$

ب) $۲\times ۳^{x+۲}=۹^{x}+۴۵$

۸- نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید:

$$(۴-\sqrt{۳})^{x^{۲}}\leq(۴+\sqrt{۳})^{x}$$

۹- دامنه‌ی تابع زیر را به صورت بازه مشخص کنید.

$$y=\frac{۱}{\sqrt{۳^{x}-۵^{x}}}$$