

دبیرستان هاشمی نژاد مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست --- تنظیم: سید رضا میررضوی ۱

۱. نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(4, 3)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۲. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) 6.5 (۳) ۷ (۴) 7.5

۳. نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۴. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۵. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}, 1$ (۴) $-\frac{9}{5}, -1$

۶. به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

- (۱) $a < -4$ (۲) $a > -4$ (۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$

۷. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۸. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۴

۹. به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ ، معکوس یک دیگرند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰. اگر $x = a$ یک جواب معادله‌ی $\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر a چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۱۱. جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{2x+5} - 2x = 5$ چگونه است؟

(۱) یک ریشه‌ی منفی (۲) دو ریشه‌ی منفی

(۳) دو ریشه‌ی مثبت (۴) یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

۱۲. به ازای کدام مقدار a ، $x = 0$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x+a}{3x+6} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{a+2}{4-x^2}$ است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۱۳. معادله‌ی $\frac{1}{x^2-3x-2} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x}$ دارای چند جواب است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴. به ازای چه مقدار از k ، معادله‌ی $\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2}$ دارای جواب $x = 1$ است؟

- (۱) 1.8 (۲) -1.8 (۳) 1.2 (۴) -1.2

۱۵. ۵۰ گرم از محلولی با غلظت ۶۰ درصد داریم. چند گرم ماده حل شدنی به آن اضافه کنیم تا غلظت محلول به ۸۰ درصد برسد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۶. معادله $x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷. اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن گاه جواب دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۸. اگر k جواب معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+k} = k$ کدام است؟

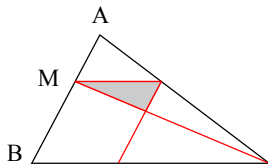
- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۱۵ (۴) ۹

۱۹. مجموعه جواب معادله $\sqrt{169-x^2} = x - 17$ کدام است؟

- (۱) $[-13, 13]$ (۲) R (۳) $[-13, 17]$ (۴) \emptyset

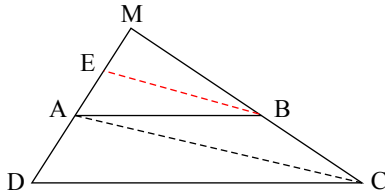
۲۰. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰



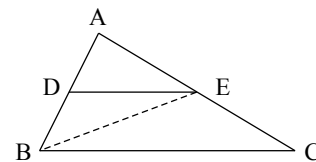
۲۱. در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله MD کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $12,25$ (۳) $12,5$ (۴) $12,75$



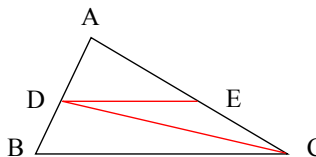
۲۲. در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{4}{5}BC$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

- (۱) ۲ (۲) $2,25$ (۳) $2,5$ (۴) $2,75$



۲۳. در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت دوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

- (۱) $1,36$ (۲) $1,44$ (۳) $1,56$ (۴) $1,64$



۲۴. مثلثی به اضلاع ۵، ۴، a ، با مثلثی به طول اضلاع ۹، ۷، b ، متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a ، کدام است؟

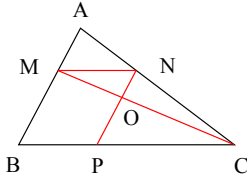
- (۱) $\frac{36}{7}$ (۲) $\frac{45}{7}$ (۳) $\frac{36}{5}$ (۴) $\frac{35}{4}$

۲۵. مثلثی به اضلاع a و b با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

- (۱) $13,5$ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) $7,2$

۲۶. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث

AMN است؟



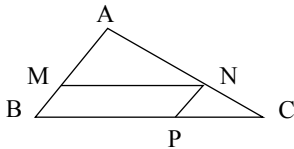
(۲) ۶۰

(۱) ۶۳

(۴) ۸۴

(۳) ۷۰

۲۷. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



(۲) ۵۲

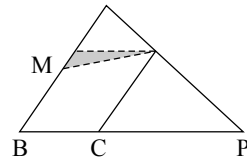
(۱) ۴۸

(۴) ۵۶

(۳) ۵۴

۲۸. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت

بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



(۱) $\frac{1}{12}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{3}{16}$

۲۹. درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

(۴) ۱٫۵

(۳) ۱٫۲۵

(۲) ۱

(۱) ۰٫۷۵

۳۰. اگر $f(x) = \frac{9^x + 1}{3^x}$ باشد، $f(x) - f(-x)$ برابر کدام است؟

(۴) صفر

(۳) 3^x

(۲) 3^{-x}

(۱) ۱

۳۱. باتوجه به ماشین $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ اگر $f(x) = 3x - 4$ آن گاه $g(2)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) ۱

(۲) ۰

(۱) ۲

۳۲. در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & x \leq 1 \\ 2mx + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(m)$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) ۰

(۱) -۱

۳۳. اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشد، $g(\frac{1}{2})$ کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

۳۴. اگر $f(x) = 3x - 1$ ، نمودار تابع f با دامنه‌ی $\{0, 1, 2, 3\}$ چگونه است؟

(۴) ۳ نقطه

(۳) ۴ نقطه

(۲) پاره خط

(۱) خط

۳۵. اگر $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$ باشد $D_f - 1$ کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 0]$ (۴) $[-1, 0]$

۳۶. برد وارون تابع $f(x) = 5(\sqrt{2-x})^3 + 1$ کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱) $(5, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[2, 5]$

۳۷. وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x} + 1$ کدام گزینه می‌باشد؟

$$y = \left(\sqrt{x + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (۲)$$

$$y = \left(\sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$y = \left(\sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (۴)$$

$$y = \left(\sqrt{x + \frac{3}{4}}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (۳)$$

۳۸. اگر تابع $f = \{(m^2 + 2m, 2), (m + 3, 4), (4 - m, 2), (2, -2)\}$ معکوس پذیر باشد، m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۳۹. وارون تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \leq 1$ کدام گزینه می‌باشد؟

$$1 - \sqrt{x-1} \quad (۲)$$

$$1 + \sqrt{x-1} \quad (۱)$$

$$1 - \sqrt{1-x} \quad (۴)$$

$$1 + \sqrt{1-x} \quad (۳)$$

۴۰. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ باشد $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$-\sqrt{8} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{8} \quad (۱)$$

۴۱. اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(\sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) ۱

۴۲. اگر $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ مجموعه‌ی $f + 2g$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, 11)\}$ (۲) $\{(2, 7)\}$ (۳) $\{(1, 4), (2, 7)\}$ (۴) $\{(1, 4), (2, 11)\}$

۴۳. اگر $f = \{(2, 7), (3, 1), (1, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(3, 4), (0, 3), (4, 2), (1, 2)\}$ برد تابع $f + g$ کدام است؟

- (۱) $\{5, 6\}$ (۲) $\{5, 6, 2\}$ (۳) $\{5, 6, 3\}$ (۴) $\{6, 5, 4\}$

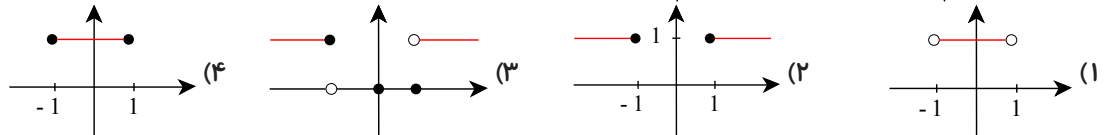
۴۴. اگر $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ دامنه‌ی تعریف تابع $f - g$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 1] \cup [-1, 1]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $R - [-1, 1]$ (۴) $[-1, 1] - [-2, 2]$

۴۵. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{2 - x}$ کدام است؟

- (۱) $\{2\}$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[-\infty, 2]$ (۴) $(-\infty, -1] \cup \{2\}$

۴۶. اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ باشد آن گاه نمودار $(f \cdot g)(x)$ کدام است؟



۴۷. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ باشد $Df \times g$ کدام است؟

(۱) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۲) $\mathbb{R} - [-2, +2]$
 (۳) $\mathbb{R} - [-1, +1]$ (۴) \emptyset

۴۸. اگر $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ باشد دامنه $\frac{f}{g}$ کدام است؟

(۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-2, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{1}{2}, 2]$ (۴) $(0, 2]$

۴۹. نمودار تابع $y = |x - 2|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۰. در نمودار تابع $f(x) = x^2$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی - قرینه نسبت به محور x ها - دو برابر کردن برد - انتقال ۳ واحد به طرف y های منفی - معادله‌ی نمودار حاصل کدام است؟

(۱) $y = 2x^2 - 8x - 11$ (۲) $y = 2x^2 - 16x - 29$
 (۳) $y = -2x^2 - 16x - 35$ (۴) $y = -2x^2 + 16x - 35$

۵۱. نقطه‌ی A بر روی دایره‌ای به شعاع ۳ واحد قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی A در خلاف جهت مثلثاتی 42° درجه چرخیده و در نقطه‌ی M قرار گرفته است متحرک دیگر از نقطه‌ی A در جهت مثلثاتی 210° درجه چرخیده و در نقطه‌ی N قرار گرفته است. طول قوس MN چند واحد است؟

(۱) $4,08$ (۲) $4,29$ (۳) $4,71$ (۴) $3,96$

۵۲. اگر $\frac{-\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\sin 3x = m - 1$ باشد مقادیر m در کدام فاصله قرار دارد؟

(۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 1]$ (۳) $(-1, \frac{1}{2})$ (۴) $(-1, 0)$

۵۳. با فرض $\tan 22^\circ = \frac{2}{5}$ ، حاصل عبارت $\frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos(202^\circ)}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۵۴. اگر $\tan \theta = 0,2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $1,2$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۵. هر گاه $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos 255^\circ - \cos 165^\circ}{2 \sin 75^\circ + 3 \cos 105^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1-a}{2-3a}$ (۲) $\frac{a-1}{2-3a}$ (۳) $\frac{1}{5}(a-1)$ (۴) $\frac{1}{5}(1-a)$

۵۶. حاصل عبارت A کدام است؟ ($\cos \theta \neq 0$)

$A = (1 + \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta)^2$

(۱) $\tan \theta \sin \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ (۴) $\cos^3 \theta$

۵۷. حاصل عبارت زیر همواره برابر با کدام گزینه است؟

$$1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = ?$$

$$\begin{array}{ll} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & (1) \\ \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & (2) \\ (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 & (3) \\ (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha & (4) \end{array}$$

۵۸. حاصل عبارت $A = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha)^2$ همواره کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 1 + \tan^2 \alpha & (1) & 1 & (2) \\ 1 & (3) & \text{صفر} & (4) \end{array}$$

۵۹. اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} - 1$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟

(عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

$$\begin{array}{llll} m = n^2 & (1) & m = n^3 & (2) \\ n = m^2 & (3) & n = m^3 & (4) \end{array}$$

۶۰. حاصل عبارت $\sin(20^\circ) + 2 \sin(-34^\circ) + \cos(-11^\circ) - 3 \cos(25^\circ) - 3 \sin 20^\circ$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -6 \sin 20^\circ & (1) & 1 & (2) \\ \text{صفر} & (3) & -4 \sin 20^\circ & (4) \end{array}$$

۶۱. اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\frac{1}{a} & (1) & -a & (2) \\ -\frac{2}{a} & (3) & -2a & (4) \end{array}$$

۶۲. اگر $\cot \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ عبارت کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{3}{4} & (1) & \frac{9}{16} & (2) \\ \frac{6}{7} & (3) & \frac{2}{3} & (4) \end{array}$$

۶۳. حاصل $\tan 3^\circ \times \tan 17^\circ \times \tan 53^\circ \times \tan 87^\circ \times \tan 73^\circ \times \tan 37^\circ$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \text{صفر} & (1) & -1 & (2) \\ 1 & (3) & \frac{1}{2} & (4) \end{array}$$

۶۴. حاصل عبارت $\cos^3 \frac{\pi}{15} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & \frac{1}{2} & (2) \\ \frac{1}{4} & (3) & \frac{1}{8} & (4) \end{array}$$

۶۵. اگر $a = \frac{\sin 55^\circ + 2 \cos 215^\circ}{3 \sin 305^\circ - \cos 325^\circ}$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \tan 35^\circ & (1) & \tan 55^\circ & (2) \\ \frac{1}{4} & (3) & \frac{1}{2} & (4) \end{array}$$

۶۶. اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$

قطع کند، مقدار $A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 27 & (1) & -27 & (2) \\ \frac{27}{2} & (3) & \frac{-27}{2} & (4) \end{array}$$

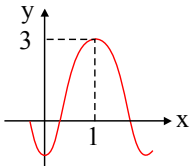
دبیرستان هاشمی نژاد مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست --- تنظیم: سید رضا میررضوی ۷

۶۷. حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

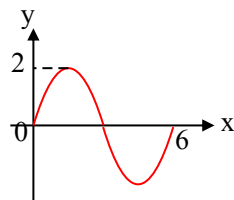
۶۸. حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$



۶۹. اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، کدام است؟

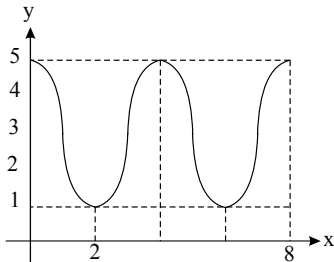
- (۱) -2 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -3



۷۰. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. کدام است $a + b$ ؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

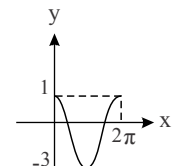
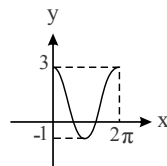
۷۱. نمودار معادله $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل زیر است؛ حاصل $a + b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



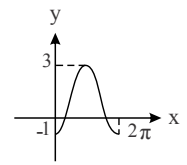
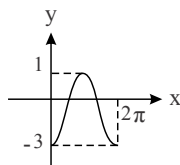
- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) 1

۷۲. نمودار تابع $y = -2 \cos x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

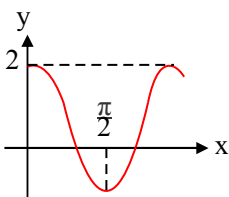


- (۱) (۲) (۳) (۴)



۷۳. اگر نمودار تابع $y = a \cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a + b$ ممکن است؟

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 6 (۴) 4



۷۴. نمودار وارون تابع $f(x) = 2(2^{x-1} - 1)$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۷۵. لگاریتم عددی در پایه ۴ برابر $\frac{15}{4}$ است. لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) -۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) -۵

۷۶. از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = 2 \log \sqrt{2} + \log 23 \\ \log x + \log y = 2 \log 3 - \log 2 \end{cases}$ حاصل لگاریتم $x + 2y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

- (۱) $0,5$ (۲) $1,25$ (۳) $0,75$ (۴) $1,5$

۷۷. مجموع مربعات جواب های معادله $\log \sqrt{\frac{2x+8}{2}} + 3 = \log \sqrt[4]{x^2 + 8x + 4}$ برابر است با:

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۴ (۳) ۹ (۴) ۲۹

۷۸. نمودار دو تابع با معادله های $y = \log(x^2 - 1)$ و $y = 1 + \log(x + 1)$ یکدیگر را در چند نقطه قطع می کنند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۹. معادله ی لگاریتمی $\log(3x + 1) + 2 \log \sqrt{x - 2} = \frac{1}{p} \log(x^2 - 2x + 1) + \log(x + 2)$ را در نظر بگیرید اگر α ریشه

ی این معادله باشد، حاصل $\log_{\alpha}(4\alpha + 13)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۰. حاصل $[x] + [2x] + [3x]$ به ازای $x = \log 8$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۱. حاصل $[\log_p \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \log_p \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}]$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۲. در بازه ی (a, b) نامعادله ی $\log_2^x < \log_3^x$ برقرار است. بیش ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) $\log 3$ (۴) ۱۰

۸۳. از دو معادله ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x + 2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $1,2$ (۲) $1,4$ (۳) $1,5$ (۴) $1,6$

۸۴. از معادله ی لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ۸، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۸۵. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1,6}$ کدام است؟

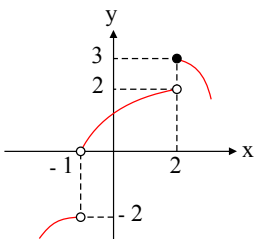
- (۱) $1 - 4k$ (۲) $2 - 5k$ (۳) $1 - 2k$ (۴) $1 - k$

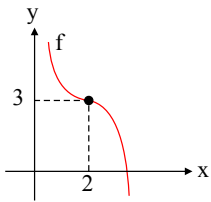
۸۶. اگر $\log 2 = k$ باشد حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

- (۱) $2 + 4k$ (۲) $4k$ (۳) $1 + k$ (۴) $2k$

۸۷. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1 - x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) صفر





۸۸. باتوجه به نمودار f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - \pi}{f(x) - 3}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$
(۳) ۱ (۴) ۳

۸۹. حد راست $f(x) = \frac{x}{2x + [x]}$ چه قدر از حد چپ آن در $x = 0$ بیش تر است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

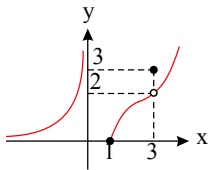
- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۹۰. اگر $f(x) = x^2[x]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۰ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) ۲

۹۱. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2| & x < 2 \\ x^2 - 4 & x \geq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، k کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $-\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

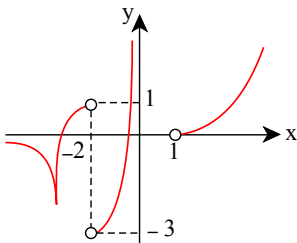


۹۲. با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح نیست؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$
(۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
(۴) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

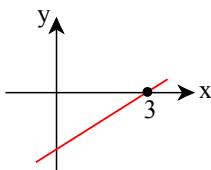
۹۳. اگر نمودار f به صورت زیر باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) وجود ندارد: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
(۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
(۴) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -3$



۹۴. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + b}{x - a} & , x \neq a \\ -5 & , x = a \end{cases}$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۷ (۴) -۸



۹۵. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{ax^2 + 2x + b} = 2$ باشد، آن گاه $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶. اگر $f(x+1) = \frac{1}{x^2 - 1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) -۱ (۴) صفر

۹۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & , |x| \leq 1 \\ x + b & , |x| > 1 \end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $2b - a$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) ۴

۹۸. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱

پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

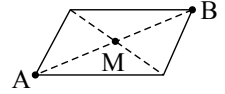
۱۰۰. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{[x]} & , 1 \leq x < 2 \\ ax + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- (۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱. گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B بدست آید.

$$3 \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

۲. گزینه ۲ هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

۳. گزینه ۴

فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3+2+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۴. گزینه ۳

شیب هر دو خط يك می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل يك مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.

$$\begin{array}{c} x - y + 1 = 0 \\ \hline \hline x - y - \frac{3}{2} = 0 \end{array}$$

(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۵. گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} \text{معادله} \\ m=1 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۶. گزینه ۱

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x = 1$ است و معادله بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad |x-1| \\ -x^3 + x^2 \\ \hline ax^2 + (4-a)x - 4 \\ -ax^2 + ax \\ \hline 4x - 4 \\ -4x + 4 \\ \hline \text{صفر} \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x = 1$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow 4 > 0 \text{ همواره برقرار است } (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

۷. گزینه ۴ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0 \\ \text{جای } a, c \text{ عوض} \quad x \rightarrow x+1 \\ \rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \end{array}$$

۸. گزینه ۲

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = A} A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A - 12)(A - 6) = 0$$

$$\begin{array}{l} A = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ A = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1 \end{array} \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

۹. گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ مرتب می کنیم.

۱۲ مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی دبیرستان هاشمی نژاد

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

$$m = 2 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ قابل قبول}$$

۱۰. گزینه ۲

با جایگذاری a در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{a-1}{a+2} + \frac{2}{a} = \frac{4a-4}{a^2-a} \Rightarrow \frac{a^2-a+2a+4}{a(a+2)}$$

$$= \frac{4a-4}{a(a-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a+4}{a(a+2)} = \frac{4(a-1)}{a(a-1)} \xrightarrow{a \neq 0, 1} \frac{a^2+a+4}{a+2} = 4$$

$$\xrightarrow{a \neq -2} a^2+a+4 = 4a+8 \Rightarrow a^2-3a-4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 4, -1$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. زیرا مخرج هیچ کدام از کسرها را صفر نمی کنند.

۱۱. گزینه ۲

$$\sqrt{2x+5} = 5+2x \xrightarrow{\text{توان } 2} 2x+5 = 4x^2+20x+25 \rightarrow 4x^2+18x+20=0$$

$$\rightarrow 2x^2+9x+10=0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 81-80=1 \rightarrow x = \frac{-9 \pm 1}{4} = -2, -\frac{5}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله اصلی (اولیه) صدق می کنند.

۱۲. گزینه ۱ $x = 0$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{a}{6} + \frac{1}{2} = \frac{a+2}{4} \times 12 \rightarrow 2a+6 = 3a+6 \rightarrow a = 0$$

۱۳. گزینه ۱ $x^2 - 3x$ را برابر A در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{A-2} + \frac{1}{A+2} = \frac{1}{A} \xrightarrow{\times A(A+2)(A-2)} A(A+2) + A(A-2) = (A+2)(A-2)$$

$$\rightarrow A^2 + 2A + A^2 - 2A = A^2 - 4 \rightarrow A^2 = -4$$

بنابراین معادله ی داده شده دارای جواب نمی باشد.

۱۴. گزینه ۲ ریشه های یک معادله در معادله صدق می کند، لذا کفایت $x = 1$ را در معادله قرار دهیم.

$$\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} + \frac{6}{k} = -3 \xrightarrow{\times 3k} k+18 = -9k$$

$$\rightarrow -10k = 18 \rightarrow k = -1,8$$

$$\frac{m}{50} = \frac{60}{100} \Rightarrow m = 30 \text{ gr} \text{ ابتدا جرم ماده حل شده را به دست می آوریم:}$$

وقتی x گرم از ماده حل شدنی به محلول اضافه می شود، غلظت آن از تابع گویای $f(x) = \frac{30+x}{50+x}$ به دست می آید.

$$f(x) = \frac{80}{100} \Rightarrow \frac{30+x}{50+x} = \frac{80}{100} \Rightarrow \frac{30+x}{50+x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 150 + 5x = 200 + 4x \Rightarrow x = 50 \text{ gr}$$

۱۶. گزینه ۱

$$x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2 \rightarrow \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2$$

(هرگاه مجموع دو عدد که عکس یکدیگر می باشند برابر ۲ باشد حتماً آن دو عدد، یک می باشند).

$$\frac{x^2+1}{x} = 1 \rightarrow x^2+1 = x \rightarrow x^2-x+1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3 < 0 \rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد.}$$

۱۷. گزینه ۱ $x=2$ در معادله صدق می کند:

$$\frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{2 \times 6} = \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{4} + \frac{m-2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15-3m+m-2}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12-2m = 4 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

توجه کنید که $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$ ؛ با جایگذاری $m=4$ در معادله، آن را حل می کنیم:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)} \Rightarrow \frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)}$$

$$\rightarrow (x+6)(x-1) = 2x^2 \Rightarrow x^2+5x-6 = 2x^2 \Rightarrow x^2-5x+6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

۱۸. گزینه ۱

برای حل ابتدا یکی از رادیکال ها را به طرف دوم منتقل می نمایم.

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5} \xrightarrow{(\quad)^2} x+1 = 1+2x-5+2\sqrt{2x-5}$$

$$\rightarrow -x+5 = 2\sqrt{2x-5} \xrightarrow{(\quad)^2} x^2-10x+25 = 4(2x-5)$$

$$\rightarrow x^2-10x+25 = 8x-20 \rightarrow x^2-18x+45 = 0$$

$$(x-3)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow k=3 \\ \text{غ ق ق} \\ x=15 \end{cases}$$

حال باید معادله ی نهائی را بسازیم.

$$\sqrt{x+k} = k \xrightarrow{k=3} \sqrt{x+3} = 3 \xrightarrow{(\quad)^2} x+3 = 9 \rightarrow x = 6$$

۱۹. گزینه ۴ یکی روش های حل معادلات رادیکالی تعیین دامنه تابع می باشد.

$$\sqrt{169-x^2} = x-17 \xrightarrow{\text{رادیکال فرجه}} x-17 \geq 0 \rightarrow x \geq 17 (I)$$

زوج نامنفی است

$$169-x^2 \geq 0$$

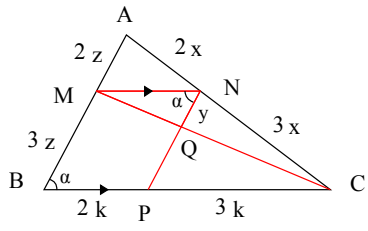
$$x^2 \leq 169 \rightarrow |x| \leq 13 \rightarrow -13 \leq x \leq 13 (II)$$

$$(I) \cap (II) \rightarrow \emptyset$$

معادله فاقد ریشه است.

۲۰. گزینه ۱

فرض کنیم $AM = 2z$ و $MB = 3z$ باشد، حال طبق قضیه ی تالس $AN = 2x$ و $NC = 3x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN \parallel BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم، با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم



دبیرستان هاشمی نژاد

۱۴ مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی

هم چنین باز بر طبق تالس: $NQ = y$

$$\frac{y}{2} = \frac{3x}{2x+3x} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

هم چنین باز بر طبق تالس:

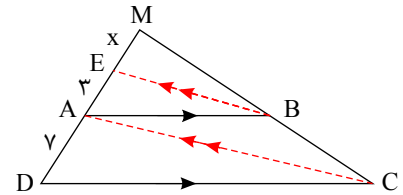
$$\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{PC}{BP} \Rightarrow \begin{cases} PC = 3k \\ BP = 2k = MN \end{cases}$$

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{BMNP}} = \frac{\frac{1}{2} \times MN \times NQ \times \sin \alpha}{MB \times BP \times \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \times 2k \times \frac{6}{5} \times \sin \alpha}{3 \times 2k \times \sin \alpha} = \frac{1}{5} = 20\%$$

حال خواهیم داشت:

۲۱. گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه ی تالس استفاده کنیم:

$$\begin{cases} \Delta MAC : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \Delta MDC : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$



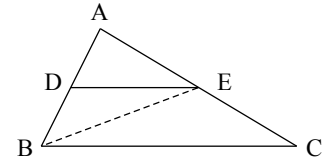
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x + 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2,25$$

در نتیجه: $MD = 2,25 + 3 + 7 = 12,25$

۲۲. گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت ها برابر نسبت قاعده هاست.

$$\frac{SEBC}{SAEB} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{SEBD}{SAEB} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{9}$$



دو رابطه ی فوق را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{\frac{SEBC}{SAEB}}{\frac{SEBD}{SAEB}} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{SEBC}{SEBD} = \frac{9}{4} = 2,25$$

۲۳. گزینه ۳

دو مثلث DEC , ADE دارای ارتفاع یکسان از رأس D می باشند. اگر ارتفاع رسم شده از D برابر h باشد داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{DEC} &= \frac{EC \cdot h}{2} \\ S_{ADE} &= \frac{AE \cdot h}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{DEC}}{S_{ADE}} = \frac{EC}{AE} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{8}{5} \quad (I)$$

چون $BC \parallel DE$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{5}{8}$ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AC}{AE}\right)^2 = \frac{64}{25} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{BDEC}}{S_{ADE}} = \frac{39}{25} = 1,56$$

۲۴. گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می خواهیم، لذا با بزرگ ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می گیریم:

مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی ۱۵

دبیرستان هاشمی نژاد

$$b < 7 < 9 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{7} = \frac{4}{b} \Rightarrow a = \frac{45}{7}, b = \frac{28}{5}$$

$$7 < b < 9 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{b} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{36}{7}, b = \frac{35}{4}$$

$$7 < 9 < b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{9} = \frac{4}{7} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{45}{7}$ می باشد.

۲۵. گزینه ۲

چون دو مثلث قابل انطباق نمی باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم $a > b$ است یکی از این دو حالت رخ می دهد.

$$\frac{3}{4} = \frac{a}{5} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{15}{4}, b = \frac{9}{4} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} = 9$$

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{12}{5} + \frac{9}{5} = 7,2$$

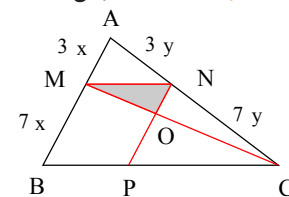
که بیشترین محیط برابر ۹ است.

۲۶. گزینه ۳ از فرض تست و قضیه ی تالس شکل زیر را نتیجه می گیریم.

$$ON \parallel AM \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{ON}{AM} \Rightarrow \frac{7y}{10y} = \frac{ON}{3x} \Rightarrow ON = \frac{21}{10}x$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2} ON \times MN \sin \hat{N}}{\frac{1}{2} AM \times MN \sin \hat{M}} \xrightarrow{\hat{N} = \hat{M}} \frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{ON}{AM} = \frac{\frac{21}{10}x}{3x} = \frac{7}{10}$$

$$= 70\%$$



۲۷. گزینه ۱

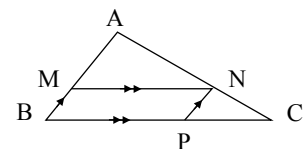
$MNPB$ متوازی الاضلاع است، بنابراین:

$$MN \parallel BC, NP \parallel AB$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ترکیب در مخرج} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

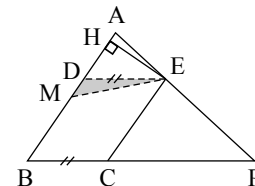
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MB \times BP \times \sin \hat{B} \quad (1), (2)}{\frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}} = \frac{\frac{2}{5} AB \times \frac{3}{5} BC}{\frac{1}{2} AB \times BC} = \frac{12}{25} = 0,48 = 48\%$$



۲۸. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \triangle PEC \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle PEC}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \triangle ADE \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{DE}{BP}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BP}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{2} \times DM \times HE \\ S_{\triangle ECB} &= BE \times HE = 2DM \times HE \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\triangle DEM} = \frac{1}{4} S_{\triangle ECB} \\ S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ECP}) = \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} - \frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) = \frac{1}{4} (\frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) \\ &= \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} \\ \rightarrow \frac{S_{\triangle DEM}}{S_{\triangle ABP}} &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

۲۹. گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگ تر را S و مساحت مثلث کوچک تر را S' بنامیم، داریم:

$$\rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت تشابه

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1,25$$

۳۰. گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{9^x + 1}{3^x} = \frac{9^x}{3^x} + \frac{1}{3^x} = 3^x + 3^{-x} \\ f(-x) &= 3^{-x} + 3^x \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) - f(-x) = 0$$

۳۱. گزینه ۱ ماشین داده شده تعریف $g(f(x))$ می باشد.

$$3x - 4 = 2 \Rightarrow x = 2 \\ g(f(x)) = x \Rightarrow g(3x - 4) = x \rightarrow g(2) = 2$$

۳۲. گزینه ۴

در توابع چند ضابطه ای برای تابع بودن نباید دامنه ی مشترکی بین ضابطه ها وجود داشته باشد در صورت وجود، باید به ازای دامنه های مشترک ضابطه ها نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + m \\ f(1) &= 2m + 2 \Rightarrow 1 + m = 2m + 2 \Rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

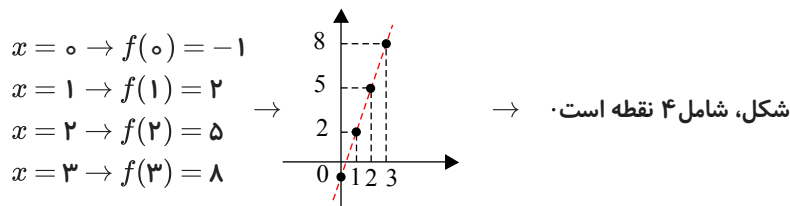
$$\Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + (-1)(-1) = 1 + 1 = 2$$

۳۳. گزینه ۲

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \rightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{-5}{4} \\ \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{25}{16}\right) + 22\left(\frac{-5}{4}\right) + 20 \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2} - \frac{55}{2} + 20 = 5$$

گزینه ۳

گزینه ۱ برای تعیین $D_{f^{-1}}$ کافیت Rf را تعیین نمائیم.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$$

$$x \in (-\infty, +\infty) \xrightarrow{\times(-)} (-\infty, +\infty) \xrightarrow{+1} \sqrt{1-x} \in (-\infty, +\infty) \xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$\sqrt{1-x} \in [0, +\infty) \xrightarrow{\times(-)} -\sqrt{1-x} \in (-\infty, 0] \xrightarrow{+1} 1 - \sqrt{1-x} \in (-\infty, 1] \xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{1-x}} \in [0, 1] \rightarrow Rf = [0, 1] = D_{f^{-1}}$$

گزینه ۲ برد تابع وارون همان دامنه‌ی تابع اصلی می‌باشد، پس کافیت دامنه‌ی f را تعیین نمائیم.

$$f(x) = 5(\sqrt{2-x})^3 + 1 \rightarrow Df: 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$R_{f^{-1}} = Df = (-\infty, 2]$$

گزینه ۴ ابتدا بهتر است عبارت به فرم مربع کامل تبدیل کنیم.

$$f(x) = x + \sqrt{x} + 1 \rightarrow f(x) = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow y = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{وارون}} x = (\sqrt{y} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow (\sqrt{y} + \frac{1}{2})^2 = x - \frac{3}{4} \rightarrow \underbrace{|\sqrt{y} + \frac{1}{2}|}_{\text{همواره}} = \sqrt{x - \frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x - \frac{3}{4}} \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \rightarrow y = (\sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2})^2 = f^{-1}(x)$$

گزینه ۳ شرط معکوس‌پذیری، یک به یک بودن تابع f می‌باشد. پس معادله‌ی زیر قابل تشکیل است.

$$m^2 + 2m = 4 - m \rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

حال هر دو مقدر را در تابع جایگذاری می‌نمائیم تا مقادیر قابل قبول را مشخص نمائیم:

$$m = 1 \rightarrow f = \{(3, 2), (4, 4), (2, -2)\} \text{ قابل قبول}$$

$$m = -4 \rightarrow \{(8, 2), (-1, 4), (2, -2)\} \text{ قابل قبول}$$

گزینه ۲ قدم اول تبدیل تابع به فرم مربع کامل می‌باشد

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \rightarrow y = (x-1)^2 + 1 \rightarrow x \leq 1 \xrightarrow{\text{وارون}} x = (y-1)^2 + 1 \quad y \leq 1$$

$$\rightarrow x-1 = (y-1)^2 \rightarrow |y-1| = \sqrt{x-1}$$

حال باتوجه به شرط $y \leq 1$ عبارت درون قدر مطلق عبارتی منفی می‌باشد:

$$-y + 1 = \sqrt{x-1} \rightarrow y = 1 - \sqrt{x-1} = f^{-1}(x)$$

۴۰. گزینه ۴

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a \quad \text{اگر } A \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \text{ روی تابع } f \text{ باشد } A' \left| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right. \text{ روی تابع } f^{-1} \text{ قرار دارد. یعنی:}$$

$$A' \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ ? \end{matrix} \right. \xrightarrow{f^{-1}} A \left| \begin{matrix} ? \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \xrightarrow{f} f(x) = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

از این تساوی علامت x را می توان تعیین کرد، مخرج ها هم علامت هستند لذا صورتها هم باید هم علامت باشند، پس x منفی است

$$-2x = \sqrt{x^2+1} \rightarrow 4x^2 = x^2+1 \rightarrow 3x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴۱. گزینه ۱

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a \quad \text{اگر } A \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \text{ روی تابع } f \text{ باشد } A' \left| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right. \text{ روی تابع } f^{-1} \text{ قرار دارد. یعنی:}$$

لذا برای حل تست کافیست به روش زیر عمل کنیم

$$A' \left| \begin{matrix} \sqrt{3} \\ ? \end{matrix} \right. \xrightarrow{f^{-1}} A \left| \begin{matrix} ? \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right. \xrightarrow{f} f(x) = \sqrt{3}$$

$$x + \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3} \rightarrow x - \sqrt{3} = \sqrt{x^2+3}$$

$$\xrightarrow{(\)^2} x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x = x^2 + 3 \rightarrow -2\sqrt{3}x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$A' \left| \begin{matrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{matrix} \right. \rightarrow f^{-1}(\sqrt{3}) = 0$$

۴۲. گزینه ۱

تمام عملیات جبری، روی مولفه ی دوم انجام می شود.

$$f = \{(1, 3)(2, 5)\} \Rightarrow f + 2g = \{(2, 11)\}$$

$$2g = \{(2, 6)(5, 2)\}$$

۴۳. گزینه ۱

$$f = \{(2, 7)(3, 1)(1, 4)(0, 2)\} \rightarrow f + g = \{(3, 5)(1, 6)(0, 5)\}$$

$$g = \{(3, 4)(0, 3)(4, 2)(1, 2)\}$$

برد تابع، مجموعه ی $\{5, 6\}$ است. دقت کنید زوج های مرتبی از دو تابع را در نظر بگیرید که دارای x های برابر باشند. سپس x های آن ها را نوشته و عرض های آن ها را با هم جمع می کنیم.

۴۴. گزینه ۲ کافی است دامنه ی تعریف دو تابع را پیدا کرده و سپس از آن ها اشتراک بگیریم (زیرا رادیکال ها باید بزرگ تر مساوی صفر باشند).

$$Df: x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1, x \leq -1 \quad (I)$$

$$Dg: 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (II)$$

از اشتراک I, II جواب $I \cup II$ $-2 \leq x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 2$ حاصل می شود یعنی $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$

۴۵. گزینه ۴ زیر هر دو رادیکال باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.

$$\text{تعیین علامت}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 2 \quad (I)$$

$$2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \quad (II)$$

از اشتراک I, II نتیجه می شود $x = 2$ یا $x \leq -1$ یعنی $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$

۴۶. گزینه ۲

$$y = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = x^2 - x^2 + 1 = 1 \rightarrow \text{خط افقی}$$

$$\text{از طرفی: } Df \cdot g = Df \cap Dg$$

$$\rightarrow \begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

۴۷. گزینه ۴

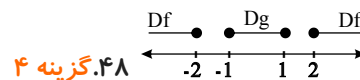
$$Df \times g = Df \cap Dg$$

پس باید ابتدا دامنه‌ی f و g را تعیین نمایم

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$Df \times g = Df \cap Dg = \emptyset$$



۴۸. گزینه ۴

$$D \frac{f}{g} = Df \cap Dg - \{x | g(x) = 0\}$$

پس قدم اول تعیین دامنه‌ی f و g می‌باشد.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow Df = [-2, +2]$$

$$g(x) = \sqrt{3x - x^2} \rightarrow 3x - x^2 \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 3 & \\ \hline P & - & + & - \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 3 & 3 \end{array} \rightarrow Dg = [0, 3]$$

حال ریشه‌های تابع g را بدست می‌آوریم:

$$g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{3x - x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$D \frac{f}{g} = Df \cap Dg - \{g \text{ های ریشه}\} = [-2, 2] \cap [0, 3] - \{0, 3\} = (0, 2]$$

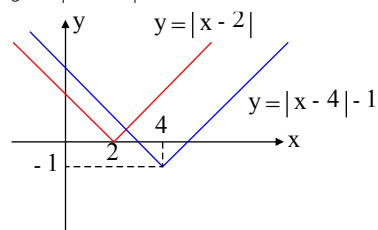
۴۹. گزینه ۳

$$y = |x - 2| \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y = |x - 2 - 2| \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y = |x - 4| - 1$$

$$y = |0 - 4| - 1 = 3$$

برای به دست آوردن محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها، کافی است $x = 0$ را در معادله قرار دهیم:

در ضمن برای درک بیش‌تر به شکل روبه‌رو دقت کنید.



۵۰. گزینه ۳

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می دهیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف های منفی}} f_1(x) = (x+4)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} f_2(x) = -(x+4)^2$$

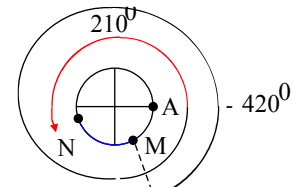
$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_3(x) = -2(x+4)^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3$$

$$f_4(x) = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 \rightarrow y = -2x^2 - 16x - 35$$

۵۱. گزینه ۳

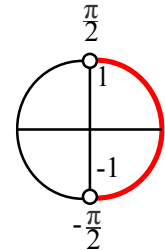
واضح است نقطه‌ی M از 27° درجه به اندازه‌ی 3° درجه بیشتر است و نقطه‌ی N از 18° درجه به اندازه‌ی 3° درجه بیشتر استپس کمان MN برابر 9° درجه یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان است.

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{L}{3} \rightarrow L = \frac{3\pi}{2} = \frac{3(3.14)}{2} = 4.71$$



۵۲. گزینه ۱

$$\frac{-\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < 3x < \frac{\pi}{2}$$

واضح است در $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ سینوس بین -1 و 1 می باشد بنابراین:

$$-1 < \sin 3x < 1 \Rightarrow -1 < m - 1 < 1 \Rightarrow 0 < m < 2$$

۵۳. گزینه ۳ داریم:

$$\begin{cases} \sin(-112^\circ) = -\sin 112^\circ = -\sin(90^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \\ \sin 158^\circ = \sin(180^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ \\ \cos 202^\circ = \cos(180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos 202^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ + \sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ}{-\cos 22^\circ} + \frac{\sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ}$$

$$= 1 - \tan 22^\circ = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

۵۴. گزینه ۴

$$\tan \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 5$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \frac{\cot \theta}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

۵۵. گزینه ۱

$$\frac{\cos 255^\circ - \cos 165^\circ}{2 \sin 75^\circ + 3 \cos 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ - 15^\circ) - \cos(180^\circ - 15^\circ)}{2 \sin(90^\circ - 15^\circ) + 3 \cos(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{-\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - 3 \sin 15^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 15^\circ}{\div \cos 15^\circ} = \frac{-\tan 15^\circ + 1}{2 - 3 \tan 15^\circ} = \frac{1 - a}{2 - 3a}$$

۵۶. گزینه ۴

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\underbrace{(1 + \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \underbrace{(1 - \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} (1 - \sin \theta)$$

$$= \underbrace{(1 - \sin^2 \theta)}_{\cos^2 \theta} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta \overbrace{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}^{\text{مزدوج}}}{\cos \theta} = \cos \theta \times \cos^2 \theta = \cos^3 \theta$$

۵۷. گزینه ۳

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} 1 - \sin \alpha \cos \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ &= (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

۵۸. گزینه ۳

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 : \text{ برای هر زاویه } x \text{ داریم}$$

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow A &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

۵۹. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

چون $\cos \alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - m^2} \xrightarrow{(\quad)^2} 1 - \sin^2 \alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = m^2$$

$$\text{از طرفی: } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{\frac{m}{n} - 1} \right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{m^2} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{m^2} \Rightarrow m^3 = n$$

۶۰. گزینه ۳

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 250^\circ = \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -\sin 20^\circ - 2 \times (-\sin 20^\circ) - \sin 20^\circ - 3 \times (-\sin 20^\circ) - 3 \sin 20^\circ \\ & = -\sin 20^\circ + 2 \sin 20^\circ - \sin 20^\circ + 3 \sin 20^\circ - 3 \sin 20^\circ = 0 \end{aligned}$$

۶۱. گزینه ۱

$$\begin{cases} \cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 285^\circ = \sin(270^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 345^\circ = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \\ \cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-3 \cos 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{-3 \sin 15^\circ + 4 \sin 15^\circ} = -\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = -\cot 15^\circ = -\frac{1}{a}$$

۶۲. گزینه ۲ با توجه به $\cot \alpha = 2$ یک رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ بدست می آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی $2 \sin \alpha$ را قرار می دهیم.

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + (2 \sin \alpha)^3 \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha (2 \sin \alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha + 8 \sin^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \times 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + 8 \sin^4 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9 \sin^4 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9}{16}$$

۶۳. گزینه ۳ هر گاه دو کمان متمم باشند \tan اولی با \cot دومی برابر است:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan \alpha = \cot \beta$$

$$3^\circ + 87^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 87^\circ = \cot 3^\circ$$

$$17^\circ + 73^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 73^\circ = \cot 17^\circ$$

$$37^\circ + 53^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 53^\circ = \cot 37^\circ$$

$$\underbrace{(\tan 3^\circ \times \cot 17^\circ)}_1 \times \underbrace{(\tan 17^\circ \times \cot 17^\circ)}_1 \times \underbrace{(\tan 73^\circ \times \cot 37^\circ)}_1 = 1$$

۶۴. گزینه ۴ راه حل اول:

با توجه به رابطه $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ داریم:

$$\cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{15} = \cos(\pi - \frac{12\pi}{15}) = -\cos \frac{12\pi}{15}$$

$$\cos \frac{5\pi}{15} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{15} = \cos(\pi - \frac{8\pi}{15}) = -\cos \frac{8\pi}{15}$$

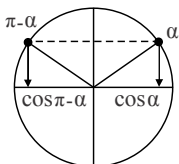
$$\Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15}$$

$$\Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15}$$

$$= -\cos^3 \frac{12\pi}{15} + \frac{1}{8} - \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15} = \frac{1}{8}$$

راه حل دوم:

هرگاه دو زاویه مکمل یکدیگر باشند کسینوس های آنها قرینه یکدیگر می باشند.



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \rightarrow \cos(\pi - \alpha) + \cos \alpha = 0$$

$$\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{11\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{13\pi}{15}\right) =$$

دبیرستان هاشمی نژاد مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی ۲۳

$$\underbrace{\left(\cos^3\left(\frac{3\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{12\pi}{15}\right)\right)}_{\text{مکمل}} + \underbrace{\left(\cos^3\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right)}_{\text{مکمل}} + \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۶۵. گزینه ۳ زوایا را بر حسب ۵۵ درجه مرتب می‌کنیم.

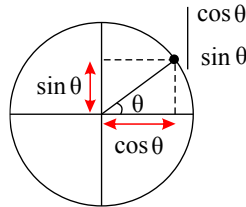
$$\text{و } \sin 305 = \sin(2\pi - 55) = -\sin 55 \text{ و } \cos 325 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 55\right) = \sin 55$$

$$\cos 215 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 55\right) = -\sin 55$$

$$\frac{\sin 55 + 2 \cos 215}{3 \sin 305 - \cos 325} = \frac{\sin 55 - 2 \sin 55}{-3 \sin 55 - \sin 55} = \frac{-\sin 55}{-4 \sin 55} = \frac{1}{4} = a$$

۶۶. گزینه ۲ اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را طبق شکل مقابل در نقطه‌ی

قطع می‌کند. $\begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases}$



پس $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ، $\cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ است.

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2} \text{ , } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta = -\frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1 + (-2\sqrt{2})^2}{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{-\frac{1}{3}} = -27$$

۶۷. گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می‌نویسیم:

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ \text{ , } \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \text{ , } \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

۶۸. گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را بر حسب 20° می‌نویسیم:

$$\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ \text{ , } \sin 700^\circ = \sin(720^\circ - 20^\circ) = \sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\cos 560^\circ = \cos(540^\circ + 20^\circ) = \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ \text{ , } \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0.4}{-1 + 0.4} = \frac{-1.4}{-0.6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۶۹. گزینه ۱ چون فاصله‌ی طولی بین کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار روی نمودار برابر یک است پس دوره‌ی تناوب تابع برابر ۲ است:

$$T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm\pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

۷۰. گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

بنابراین $a = 2$ است پس $a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$\left| \begin{array}{l} \circ \text{ صدق در} \\ \circ \text{ تابع} \end{array} \right. \rightarrow 5 = a(1) + 3 \rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

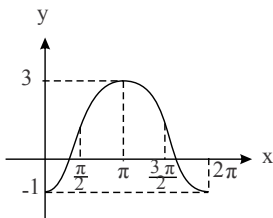
$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ در گزینه ها نیست}$$

دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin x$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

۷۲. گزینه ۳

$$\begin{aligned} -2 \cos 0 + 1 &= -2 + 1 = -1 \\ -2 \cos \frac{\pi}{2} + 1 &= 0 + 1 = 1 \\ -2 \cos \pi + 1 &= -2 \times (-1) + 1 = 3 \\ -2 \cos \frac{3\pi}{2} + 1 &= 0 + 1 = 1 \\ -2 \cos 2\pi + 1 &= -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$



| x | y |
|------------------|-----|
| 0 | -1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| π | 3 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 1 |
| 2π | -1 |

۷۳. گزینه ۴ می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(0, 2)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

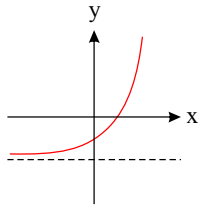
$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cos 0 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{4}$ است، بنابراین:

$$\frac{T}{۲} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a + b$ می تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۷۴. گزینه ۴



داریم $f(x) = 2(2^{x-1} - 1) \Rightarrow y = 2^x - 2$ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی گذرد. از آن جا که نمودار تابع f و نمودار وارون آن نسبت به نیم سازه ربع اول و سوم دستگاه مختصات قرینه هستند، پس نمودار وارون تابع f از ناحیهی چهارم دستگاه مختصات نخواهد گذاشت.

۷۵. گزینه ۴ می دانیم: $\log_k^a m = \frac{n}{m} \log_k^a$

عدد مورد نظر را a در نظر می گیریم، طبق فرض داریم:

$$\log_4^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_{2^2}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_2^a = \frac{15}{2}$$

$$\log_8^{\frac{1}{2}} = \log_{2^3}^{a^{-2}} = \frac{-2}{3} \log_2^a = -\frac{2}{3} \left(\frac{15}{2} \right) = -5$$

۷۶. گزینه ۳

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a m = \frac{n}{m} \log_k^a$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$

$$\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = \frac{\log(\sqrt{2})^2}{2} + \log 23 \Rightarrow \log(x^2 + 4y^2) = \log 46 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 46 \\ \log x + \log y = 2 \log 3 - \log 2 \Rightarrow \log xy = \log \frac{9}{2} \Rightarrow xy = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 46 + 4\left(\frac{9}{2}\right) = 64 \Rightarrow x + 2y = 8$$

بنابراین:

$$\log_{16}^{x+2y} = \log_{16}^8 = \log_{2^4}^{2^3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

۷۷. گزینه ۲

می دانیم: $\log_k^a m = \frac{n}{m} \log_k^a$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

ابتدا با توجه به ویژگی های لگاریتم، عبارت داده شده را ساده تر می کنیم.

$$\log_2^{4x^2 + 8x + 4} = \log \frac{\sqrt{2x+8}}{\sqrt{2}} + 3 \rightarrow \log_2^{4x^2 + 8x + 4} = \log \frac{(2x+8)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + 3$$

$$\log_2^{4x^2 + 8x + 4} = \log_2^{2x+8} + 3 \rightarrow \log_2^{4x^2 + 8x + 4} - \log_2^{2x+8} = 3$$

$$\rightarrow \log_2^{\frac{4x^2 + 8x + 4}{2x+8}} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{4x^2 + 8x + 4}{2x+8} = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 16x + 64 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \rightarrow x = 5, -3$$

هر دو جواب ها قابل قبولند پس مجموع مربعات جوابها، برابر $34 = 9 + 25$ است.

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k \frac{a}{b}, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم: ۷۸. گزینه ۲}$$

کافی است دو تابع را تلاقی دهیم.

$$1 + \log(x+1) = \log(x^2 - 1) \rightarrow \log(x^2 - 1) - \log(x+1) = 1$$

$$\rightarrow \log \frac{x^2 - 1}{x+1} = 1 \rightarrow \log \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = 1 \rightarrow \log(x-1) = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} x-1 = 10 \rightarrow x = 11$$

بنابراین دو تابع در یک نقطه، همدیگر را قطع می کنند. (توجه کنید که $x = 11$ چون در دامنه ی هر دو تابع قرار دارد، قابل قبول می باشد.)

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می دانیم: ۷۹. گزینه ۲}$$

$$\log(3x+1) + 2 \log \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2)$$

$$\rightarrow \log(3x+1) + \log(\sqrt{x-2})^2 = \frac{1}{2} \log(x-1)^2 + \log(x+2)$$

$$\rightarrow \log(3x+1) + \log(x-2) = \log(x-1) + \log(x+2)$$

$$\rightarrow \log(3x+1)(x-2) = \log(x-1)(x+2) \rightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق (در دامنه ی تعریف قرار ندارد)} \\ x = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{\Delta}^{4\alpha+13} \stackrel{\alpha=3}{=} \log_{\Delta}^{25} = \log_{\Delta}^{5^2} = 2$$

۸۰. گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$[\log 8] + [2 \log 8] + [3 \log 8] = [\log 8] + [\log 64] + [\log 512]$$

$$\text{داریم: } 1 < 8 < 10 \rightarrow \log 1 < \log 8 < \log 10 \rightarrow 0 < \log 8 < 1 \rightarrow [\log 8] = 0$$

$$10 < 64 < 100 \rightarrow \log 10 < \log 64 < \log 100 \rightarrow 1 < \log 64 < 2 \rightarrow [\log 64] = 1$$

$$100 < 512 < 1000 \rightarrow \log 100 < \log 512 < \log 1000 \rightarrow 2 < \log 512 < 3 \rightarrow [\log 512] = 2$$

$$\text{بنابراین: } [\log 8] + [\log 64] + [\log 512] = 0 + 1 + 2 = 3$$

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k \frac{a}{b} \quad \text{می دانیم: ۸۱. گزینه ۳}$$

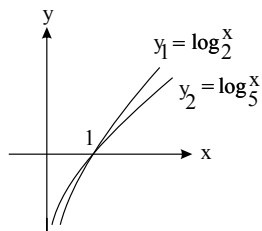
$$\log_p^{2+\sqrt{3}} - \log_p^{2-\sqrt{3}} = \log_p \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \text{گویا می کنیم} \quad \log_p \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \log_p \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$= \log_p \frac{4+3+4\sqrt{3}}{1} = \log_p^{7+4\sqrt{3}} = \log_p^{13/8}$$

$$2^3 < 13/8 < 2^4 \rightarrow \log_p^{2^3} < \log_p^{13/8} < \log_p^{2^4} \rightarrow 3 < \log_p^{13/8} < 4 \rightarrow [\log_p^{13/8}] = 3$$

۸۲. گزینه ۱ از مقایسه ی نمودار دو تابع با معادله های $y_1 = \log_5^x$ و $y_2 = \log_2^x$ معلوم می شود که بزرگ ترین بازه ای که

نامعادله ی مورد نظر سؤال در آن برقرار است (۱, ۰) است.



$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم: ۸۳. گزینه ۴}$$

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y}$$

$$\rightarrow 2x+y = 2+x-y \rightarrow x+2y = 2 \rightarrow x = 2-2y$$

دبيرستان هاشمی نژاد مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی ۲۷

$$\log(x + 2y) = 1 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10y$$

$$\rightarrow x + 2y = 10y \rightarrow x = 8y \xrightarrow{x=2-2y} 2 - 2y = 8y \rightarrow 10y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{10} \xrightarrow{x=8y} x = \frac{16}{10} = 1,6$$

۸۴. گزینه ۴

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_k^a m = \frac{n}{m} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می دانیم:}$$

$$\log_3^{2x^2+1} - \log_3^{x+2} = 1 \rightarrow \log_3^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه ی \log_8^{2x-1} فقط به جای x می توانیم مقدار $x = \frac{5}{2}$ را جایگزین

کنیم، زیرا $x = -1$ جلوی لگاریتم را منفی می کند.

$$\log_8^{2x-1} \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_8^{2\left(\frac{5}{2}\right)-1} = \log_8^4 = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}$$

۸۵. گزینه ۱

$$\log_k^a n = n \log_k^a, \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b, \log 5 = 1 - \log 2 \text{ می دانیم:}$$

$$\log \sqrt[3]{1,6} = \log(1,6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1,6 = \frac{1}{3} \log \frac{16}{10}$$

$$= \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) = \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) = \frac{1}{3} (3 - 4 \log 5)$$

$$= \frac{1}{3} (3 - 12k) = \frac{1}{3} (3(1 - 4k)) = 1 - 4k$$

۸۶. گزینه ۲

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^a n = n \log_k^a \text{ می دانیم:}$$

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 5 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log \underbrace{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}_{\text{مزدوج}} = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 1$$

۸۷. گزینه ۴

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow 1 - x > -1$$

پس وقتی $x \rightarrow 2^-$ آنگاه $x \rightarrow (-1)^+$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

باتوجه به نمودار، حد راست تابع f در $x = -1$ برابر صفر است.

۸۸. گزینه ۱ باتوجه به نمودار، مشخص است که $f(x) \rightarrow 3^+$ زیرا وقتی $x \rightarrow 2^-$ با مقادیر کم تر از ۲

روی نمودار به ۲ نزدیک میشویم عرض نقاط تابع با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک میشوند یعنی (3^+) با توجه به این توضیح، حاصل

حد را می یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - \pi}{f(x) - 2} \stackrel{\pi \approx 3,14}{=} \frac{2 \times 2 - 3,14}{3^+ - 2} = \frac{4 - 3,14}{0^+} = \frac{0,86}{0^+} = +\infty$$

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-1} = \frac{0}{0-1} = 0$$

بنابراین حد راست از حد چپ $\frac{1}{2}$ بیشتر است.

۹۰. گزینه ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2[x] - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

روش دوم:

$$\text{می‌دانیم: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'_+(1) \xrightarrow{[1^+] = 1} f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f'_+(1) = 2$$

گزینه ۹۱

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 2$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k + [x]) = k + [2^+] = k + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$$

$$f(2) = k + [2] = k + 2$$

$$\rightarrow k + 2 = -\frac{1}{4} \rightarrow k = -\frac{9}{4}$$

۹۲. گزینه ۱ به بررسی می‌پردازیم.

$$\text{گزینه ۱ اول: } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$\text{گزینه ۱ دوم: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\text{گزینه ۱ سوم: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{گزینه ۱ چهارم: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

بنابراین فقط گزینه ۱ اول، صحیح نیست.

گزینه ۹۳

به بررسی می‌پردازیم.

$$\text{گزینه ۱ اول: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \quad \text{گزینه ۱ سوم: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{گزینه ۱ دوم: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{گزینه ۱ چهارم: } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -3$$

۹۴. گزینه ۴ مقدار تابع در $x = 3$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\frac{x^2 - x + b}{x - a}$ به ازای $x = 3$ صفر گردد.

$$x = 3 \rightarrow \frac{9 - 3 + b}{3 - a} = 0 \rightarrow 6 + b = 0 \rightarrow b = -6$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x = a$ نیز پیوسته باشد.

$$x = a \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - x - 6}{x - a} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x - 1}{1} = 2a - 1 = -5 \Rightarrow 2a - 1 = -5 \Rightarrow a = -2 \\ f(a) = -5 \end{cases}$$

پس $a + b = -8$ است.

۹۵. گزینه ۴ قدم اول جایگذاری عدد می باشد با توجه به این که صورت کسر عدد صفر شده و جواب حد عدد غیر صفر می باشد، مخرج کسر باید به ازای $x = 1$ برابر صفر شود:

$$ax^2 + 2x + b \stackrel{x=1}{=} 0$$

$$a + b + 2 = 0 \rightarrow b = -2 - a$$

در مرحله‌ی بعد مخرج را با استفاده از تقسیم تجزیه می‌نمائیم:

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{ax + a + 2} \Big| \frac{x-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(\cancel{x-1})}{(ax+a+2)(\cancel{x-1})} = \frac{-1}{2a+2} = 2 \rightarrow 4a+4 = -1 \rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$b = -2 - a = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$a - b = -\frac{1}{2}$$

۹۶. گزینه ۲ روش اول:

باید $0^+ \rightarrow x+1$ میل کند پس $x \rightarrow (-1)^+$ میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x+1) = \frac{1}{((-1)^+)^2 - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$x+1 = t \rightarrow x = t-1 \rightarrow f(t) = \frac{1}{(t-1)^2 - 1} = \frac{1}{t^2 + 1 - 2t - 1} = \frac{1}{t^2 - 2t} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{0^+(-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۹۷. گزینه ۳ ابتدا شرط تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & , -1 \leq x \leq 1 \\ x + b & , x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

چون تابع در تمام نقاط حد دارد پس تابع در $x = -1$ و $x = 1$ نیز حد دارد.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+b) = 1+b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - ax + 1) = 1 - a + 1 = 2 - a \end{cases} \rightarrow 1+b = 2-a \rightarrow a+b = 1$$

$$x = -1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - ax + 1) = 1 + a + 1 = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x+b) = -1 + b \end{cases} \rightarrow a+2 = -1+b \rightarrow a-b = -3$$

از حل دستگاه $a = -1$ و $b = 2$ بدست می‌آید پس $2b - a = 5$ است.

۹۸. گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \left(a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} \right) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۹۹. گزینه ۱ برای رسیدن به مبهم شناخته شده \div باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

دبیرستان هاشمی نژاد

۳۰ مرور ۵ فصل ریاضی ۲ تجربی در ۱۰۰ تست ---- تنظیم: سید رضا میررضوی

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - (x+1)x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}x} = -\frac{5}{2}$$

۱۰۰. گزینه ۳ شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ باهم برابر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + 1) = 2a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[2^-]} = \frac{2}{1} = 2 \\ f(2) = 2a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۴۰۶۲۱۰

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۱ -۵ | ۳ -۴ | ۴ -۳ | ۲ -۲ | ۳ -۱ |
| ۲ -۱۰ | ۲ -۹ | ۲ -۸ | ۴ -۷ | ۱ -۶ |
| ۴ -۱۵ | ۲ -۱۴ | ۱ -۱۳ | ۱ -۱۲ | ۲ -۱۱ |
| ۱ -۲۰ | ۴ -۱۹ | ۱ -۱۸ | ۱ -۱۷ | ۱ -۱۶ |
| ۲ -۲۵ | ۲ -۲۴ | ۳ -۲۳ | ۲ -۲۲ | ۲ -۲۱ |
| ۴ -۳۰ | ۳ -۲۹ | ۲ -۲۸ | ۱ -۲۷ | ۳ -۲۶ |
| ۱ -۳۵ | ۳ -۳۴ | ۲ -۳۳ | ۴ -۳۲ | ۱ -۳۱ |
| ۴ -۴۰ | ۲ -۳۹ | ۳ -۳۸ | ۴ -۳۷ | ۲ -۳۶ |
| ۴ -۴۵ | ۲ -۴۴ | ۱ -۴۳ | ۱ -۴۲ | ۱ -۴۱ |
| ۳ -۵۰ | ۳ -۴۹ | ۴ -۴۸ | ۴ -۴۷ | ۲ -۴۶ |
| ۱ -۵۵ | ۴ -۵۴ | ۳ -۵۳ | ۱ -۵۲ | ۳ -۵۱ |
| ۳ -۶۰ | ۳ -۵۹ | ۳ -۵۸ | ۳ -۵۷ | ۴ -۵۶ |
| ۳ -۶۵ | ۴ -۶۴ | ۳ -۶۳ | ۲ -۶۲ | ۱ -۶۱ |
| ۳ -۷۰ | ۱ -۶۹ | ۳ -۶۸ | ۱ -۶۷ | ۲ -۶۶ |
| ۴ -۷۵ | ۴ -۷۴ | ۴ -۷۳ | ۳ -۷۲ | ۱ -۷۱ |
| ۳ -۸۰ | ۲ -۷۹ | ۲ -۷۸ | ۲ -۷۷ | ۳ -۷۶ |
| ۱ -۸۵ | ۴ -۸۴ | ۴ -۸۳ | ۱ -۸۲ | ۳ -۸۱ |
| ۴ -۹۰ | ۳ -۸۹ | ۱ -۸۸ | ۴ -۸۷ | ۲ -۸۶ |
| ۴ -۹۵ | ۴ -۹۴ | ۴ -۹۳ | ۱ -۹۲ | ۱ -۹۱ |
| ۳-۱۰۰ | ۱ -۹۹ | ۲ -۹۸ | ۳ -۹۷ | ۲ -۹۶ |