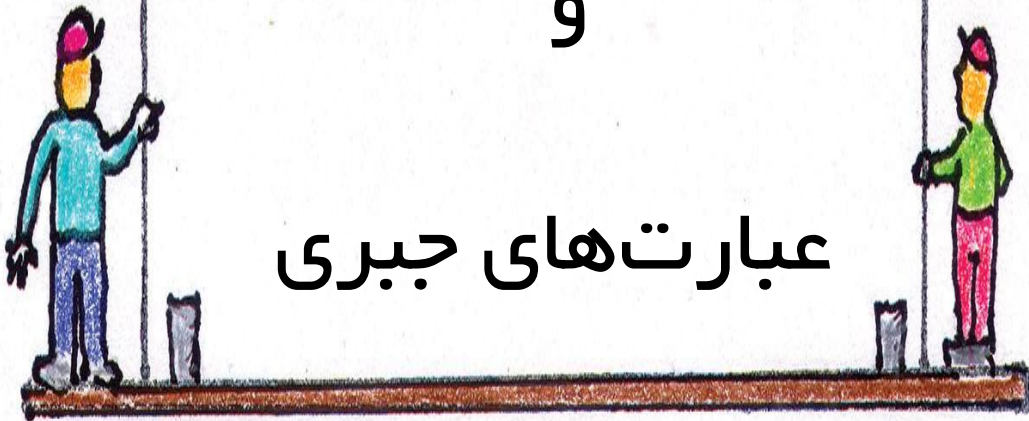


فصل سوم

توان‌های گویا

و

عبارت‌های جبری



فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ ($n \geq 2$) باشد خواهیم داشت:

عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a می‌نامیم در صورتی که $b^n = a$ که آن را به صورت $b = \sqrt[n]{a}$

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{نشان می‌دهیم:}$$

$$\sqrt[3]{64} = 4 \Leftrightarrow 4^3 = 64$$

مثال ۱: ۴ یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است زیرا:

$$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$$

مثال ۲: (-۵) ریشه‌ی سوم (-۱۲۵) است زیرا:

یادآوری: 📌

۱- عدد مثبت a دارای دو ریشه‌ی دوم است. b و $-b$

$$b^2 = a, \quad (-b)^2 = a$$

۲- عدد منفی a ریشه‌ی دوم ندارد.

۳- هر عدد صحیح a دارای یک ریشه‌ی سوم است که با خود a هم علامت می‌باشد.

هرگاه عددی دارای ریشه‌ی دوم یا سوم دقیق نباشد آن را به صورت \sqrt{a} یا $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳: مقدار تقریبی $\sqrt{19}$ را به دست آورید.

عدد ۱۹ بین دو مجذور کامل ۱۶ و ۲۵ قرار دارد، پس $\sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$ یعنی $4 < \sqrt{19} < 5$ و

چون ۱۹ به ۱۶ نزدیکتر است پس $\sqrt{19}$ به ۴ نزدیکتر است: $(4/1)^2 = 16/11$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 18/49$$

$$\left(\frac{4}{4}\right)^2 = 19/36$$

پس مقدار $\sqrt{19}$ با تقریب کمتر از $1/10$ بین $4/3$ و $4/4$ قرار دارد.

$$4/3 < \sqrt{19} < 4/4$$

هرچه این تقریب را بیشتر کنیم عدد به دست آمده دقیق‌تر است. ولی باید در نظر داشت که هر چقدر هم که تعداد اعشار بیشتری در نظر بگیریم، عدد دقیقی به دست نمی‌آید.

نکته ۱: اگر n عددی فرد باشد $\sqrt[n]{a}$ همواره تعریف می‌شود و چون a^n توان n ام عدد a می‌باشد خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

اما اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a}$ در صورتی تعریف می‌شود که a منفی نباشد و در این صورت خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

نکته ۲:

نکته ۳: اگر n عددی زوج باشد و a و b نامنفی باشند، آن‌گاه $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

(در صورت فرد بودن n تساوی همواره برقرار است.)

مثال ۴: حاصل عبارت را به دست آورید.

$$2 \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{40}$$

(از این قانون برای ساده کردن رادیکال‌ها استفاده می‌شود.)

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \times 3} = \sqrt[5]{2^5 \times 3} = 2 \sqrt[5]{3}$$

مثال ۵: عبارت مقابل را ساده کنید.

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & n \text{ فرد} \\ |a| \sqrt[n]{b} & n \text{ زوج} \end{cases} \quad \text{پس به طور کلی:}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

نکته ۶: اگر M و n دو عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ تعریف شده باشد، آن گاه

مثال ۶: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[12]{6}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[15]{10}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

نکته ۷: اگر a عددی نامنفی و $k \in \mathbb{N}$ باشد، داریم:

مثال ۷: حاصل عبارات را به دست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^6} \times \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^8} = 5^2 = 25$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{3 - \sqrt{8}} \times \sqrt[6]{17 + 6\sqrt{8}} = \sqrt[6]{(3 - \sqrt{8})^2} \times \sqrt[6]{17 + 6\sqrt{8}}$$

$$= \sqrt[6]{\left(\frac{9 + 8 - 6\sqrt{8}}{17}\right)} \times \sqrt[6]{(17 + 6\sqrt{8})} = \sqrt[6]{17 - 6\sqrt{8}} \times \sqrt[6]{17 + 6\sqrt{8}} = \sqrt[6]{289 - 288} = 1$$

نکته ۸: می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ آن گاه هر چه توان a بیشتر شود، حاصل کوچکتر می‌شود. ولی:

در ریشه‌گیری هر چه فرجه بیشتر شود عدد حاصل بزرگتر است.

$$\sqrt[3]{\frac{0}{125}} < \sqrt[5]{\frac{0}{125}}$$

$$0/5 < 0/6$$

$$\sqrt{\frac{0}{25}} < \sqrt[3]{\frac{0}{25}}$$

$$0/5 < 0/62$$

مثال ۸:

نکته ۹: اگر $a > 1$ باشد:اگر $0 < a < 1$ باشد:

$$a > \sqrt[n]{a}$$

$$a < \sqrt[n]{a}$$

5

$$a = 8 \rightarrow 8 > \sqrt[3]{8} = 2$$

مثال ۹:

$$a = 0/5 \rightarrow 0/5 < \sqrt[3]{0/5} = 0/79$$

$$\begin{cases} a > \sqrt[n]{a} & \text{نکته ۱۰: اگر } 0 < a < 1 \text{ و } n \text{ و } m \text{ فرد باشد} \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a} & m > n \end{cases}$$

$$a = -0/2 \quad \begin{cases} \sqrt[3]{-0/2} = -0/58 \\ \sqrt[5]{-0/2} = -0/72 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-0/2} > \sqrt[5]{-0/2}$$

مثال ۱۰:

در اعداد منفی بین صفر و یک هر چه فرجه بزرگتر شود، حاصل عدد کوچکتر می‌شود.

نکته ۱۱: اگر $a < -1$ باشد، هر چه فرجه بیشتر شود عدد حاصل بزرگتر می‌شود.

$$a = -3 \implies \begin{cases} \sqrt[3]{-3} = -1/44 \\ \sqrt[4]{-3} = -1/24 \\ \sqrt[5]{-3} = -1/16 \end{cases} \implies a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} \quad \text{مثال ۱۱:}$$

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

نکته ۱۲:

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

6

رادیکال مرکب: 

رادیکال‌هایی به شکل کلی $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ یا $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ را رادیکال مرکب می‌نامیم. برای محاسبه‌ی این رادیکال‌ها از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$۱) \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad : \quad c^2 = a^2 - b, c > 1$$

$$۲) \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad : \quad c^2 = a^2 - b, c < 1$$

مثال ۱۲: مقدار $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ را محاسبه کنید.

ابتدا باید ۴ را به زیر رادیکال ببریم، سپس c^2 را به دست آوریم.

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+\sqrt{4^2 \times 3}} = \sqrt{7+\sqrt{48}}$$

$$c^2 = a^2 - b = 7^2 - 48 = 49 - 48 = 1 \rightarrow c = 1$$

توان
ای
گویا و
عبارت
های
جبری

فصل
سوم

$$\sqrt{y + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{y+1}{2}} + \sqrt{\frac{y-1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

درسنامه ۲: توان‌های گویا

فرض کنید در یک روز تابستان خوزستان که پدیده‌ی ریزآلاینده‌ها (گرد و خاک) رخ می‌دهد، در شهری مانند دزفول میزان ریزآلاینده‌ها در هر ساعت ۳ برابر شود. در این صورت اگر میزان ریزگردها یک واحد حجم باشد در پایان ساعت اول و دوم و ... و n ام میزان ریزگردها از دنباله‌ی زیر پیروی می‌کند:


$$3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots$$

می‌خواهیم بدانیم پس از گذشت نیم ساعت حجم ریزگردها چه مقدار خواهد شد؟
 $3^{\frac{1}{2}}$

اگر در نیم ساعت حجم ریزگردها b برابر شود، پس بعد از یک ساعت حجم ریزگردها $b \times b = b^2$ خواهد شد.

از طرفی پس از یک ساعت حجم ریزگردها ۳ برابر می‌شود، پس $b^2 = 3$ یعنی $b = \sqrt{3}$ (زیرا مثبت است)

$$\text{پس } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

چند نکته: 

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

۱- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد خواهیم داشت:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

۲- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی و p یک عدد صحیح باشد:

مثال ۱: اعداد توان‌دار را به رادیکال تبدیل کرده و در صورت امکان ساده کنید:

$$6^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{6}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب) } 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{پ) } \sqrt{2^{\frac{3}{5}}} = \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

نکته ۳: تمام قوانین ریشه‌گیری و خاصیت‌هایی که برای توان‌های طبیعی اعداد، در گذشته فراگرفتیم، درباره‌ی توان‌های گویا نیز درست است.

8

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

مثال ۲: اگر $a^{\frac{m}{n}}$ و $a^{\frac{p}{q}}$ قابل تعریف باشند، نشان دهید:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

مثال ۳: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{2^{20}} = 2^5 = 32$$

$$\text{ب) } \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{پ) } (0.01)^{-\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$\text{ت) } 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\text{ث) } 8^{\frac{5}{3}} \div 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = \sqrt[3]{8}$$

توان‌های
گویا و
عبارت‌های
جبری

فصل
سوم

$$ج) (0/25)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

تمرینات درس ریشه‌گیری:

۱- درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.

الف) $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

ب) $36^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{36}$

پ) $(\sqrt{3})^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

ت) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

ث) $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$

ج) $64 = 2^6 \Leftrightarrow \sqrt[6]{64} = 2$

چ) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{8}}} = \sqrt[20]{2}$

ح) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < 3^{-\frac{3}{2}}$

خ) $\sqrt[4]{5} = 5^{0/2}$

د) $a^{-r} = \frac{1}{r} (r \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R}^+)$

۲- کامل کنید.

الف) $\sqrt[5]{-32} = \dots\dots\dots$

ب) $\sqrt[5]{27} \times \dots\dots\dots = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

پ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[15]{10}$

ت) $\sqrt[3]{\dots\dots\dots} = -0/1$

ث) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \dots\dots\dots$

ج) $\sqrt[m]{a} \times \dots\dots\dots = \sqrt[m \cdot n]{a^{m \cdot n}}$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{16}$$

$$\text{ح) } -2\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{\dots\dots}$$

۳- کدام مورد زیر تعریف نشده است؟

$$\sqrt{-25} \text{ (ت)}$$

$$-\sqrt[4]{16} \text{ (پ)}$$

$$\sqrt[3]{-27} \text{ (ب)}$$

$$\sqrt{(-x)^2} \text{ (الف)}$$

۴- کدام مورد نادرست است؟ ($a > 1$)

$$a^n > a^{n-1} \text{ (ت)}$$

$$\sqrt[n]{a} > 1 \text{ (پ)}$$

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} \text{ (ب)}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \text{ (الف)}$$

۵- کدام گزینه درست است؟

$$-2\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{32} \text{ (ب)}$$

$$-2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16} \text{ (الف)}$$

$$\sqrt[10]{(-5)^6} = \sqrt[10]{125} \text{ (ت)}$$

$$\sqrt[15]{(-2)^3} = -\sqrt[5]{-2} \text{ (پ)}$$

۶- اگر ریشه‌ی سوم عدد k ، $\frac{2}{3}$ باشد، ریشه‌ی دوم عدد k کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{9} \text{ (ت)}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} \text{ (پ)}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (ب)}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (الف)}$$

۷- چند تا از تساوی‌های زیر نادرست است؟

$$\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{5+3}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3}$$

$$\sqrt{3^2 + 2^2} = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = -5$$

۴ (ت)

۳ (پ)

۲ (ب)

۱ (الف)

۸- حاصل $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{81}$ برابر است با:

ت) $\sqrt[3]{3}$

پ) $-\sqrt[3]{3}$

ب) $-\sqrt[3]{9}$

الف) -3

۹- حاصل عبارت $\sqrt{(-7)^2}$ برابر است با:

ت) جذرگیری ممکن نیست

پ) ± 7

ب) -7

الف) 7

۱۰- به فرض آنکه $a = 2\sqrt{3}$ و $b = \frac{\sqrt{50}}{2}$ و $c = \sqrt{12/2}$ ، کدام نابرابری برقرار است؟

ت) $a < c < b$

پ) $b < c < a$

ب) $b < a < c$

الف) $a < b < c$

۱۱- حاصل $\sqrt[3]{-4} \times \sqrt{2}$ کدام است؟

ت) $4\sqrt[6]{2}$

پ) $2\sqrt[6]{2}$

ب) $-2\sqrt[6]{2}$

الف) $-4\sqrt[6]{2}$

۱۲- حاصل عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{10} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^8$ کدام است؟

ت) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

پ) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

ب) $5 - 2\sqrt{6}$

الف) $5 + 2\sqrt{6}$

۱۳- به کمک تجزیه‌ی عبارت زیر رادیکال، عبارت را ساده کنید.

الف) $\sqrt[4]{243} =$

ب) $\sqrt[3]{-250} =$

الف) $\sqrt[5]{(-32)^3} + 2\sqrt[3]{125} =$

۱۴- حاصل عبارت را به دست آورید.

۱۵- عبارات مقابل را ساده کنید.

الف) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \times (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}} =$

$$\text{ب) } (2\sqrt{2} - \sqrt{7})^{\sqrt{2}+1} \times (2\sqrt{2} + \sqrt{7})^{\sqrt{2}+3} =$$

۱۶ - مقایسه کنید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} \quad \square \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}}$$

$$\text{ب) } (\sqrt{2})^{-2} \quad \square \quad 2^{-\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[15]{9\sqrt[8]{\frac{1}{3}}} =$$

۱۷ - حاصل عبارت را به دست آورید.

۱۸ - اگر $a > 0$ و $x > 0$ معادلات را حل کنید.

$$\text{الف) } a\sqrt{2} = 2$$

$$\text{ب) } x\sqrt{3+\sqrt{2}} = 2\sqrt{75}$$

۱۹ - الف) $\sqrt[6]{8}$ را به صورت ریشه‌ی دوم بنویسید.ب) $\sqrt{3}$ را با فرجه‌ی ۴ و با فرجه‌ی ۶ بنویسید.۲۰ - الف) $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{-2}$ را با فرجه‌ی ۹ بنویسید.ب) $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[3]{-4}$ را با فرجه‌ی ۶ بنویسید.۲۱ - عدد $\sqrt[12]{64}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه‌ی ۳ بنویسید.

۲۲ - ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید و پس از ساده کردن مجدداً بر حسب ریشه‌گیری بنویسید.

$$\text{الف) } \sqrt[4]{5^3} \sqrt{5} =$$

$$\text{ب) } \sqrt[6]{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{14}} =$$

$$\text{پ) } \sqrt[5]{4} \div \sqrt[8]{8} =$$

۲۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} =$$

$$\text{ب) } \sqrt{13 + \sqrt{48}} =$$

$$\text{پ) } \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} =$$

درسنامه ۳: عبارتهای جبری

در سال گذشته با مفهوم اتحاد آشنا شدید.

در اتحاد مربع مجموع $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ هر عدد حقیقی که به جای a و b در دو طرف تساوی جای گذاری کنید، حاصلها با هم برابر خواهد شد.

$$a = 2, b = 3 \rightarrow \begin{cases} (a + b)^2 = (2 + 3)^2 = 25 \\ a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25 \end{cases}$$

ضمناً سال گذشته با اتحادهای زیر آشنا شده‌اید:

$$\text{مربع دوجمله‌ای: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\text{جمله مشترک: } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a.b$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ : مزدوج}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \text{ : مربع سه جمله‌ای}$$

اتحاد بعدی که خواهیم آموخت «مکعب مجموع» نام دارد که به کمک اتحاد مربع مجموع به دست می‌آید:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

که با تبدیل b به $(-b)$ به صورت اتحاد مکعب تفاضل نوشته می‌شود:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

آخرین اتحادی که امسال فرامی‌گیریم به نام «مجموع یا تفاضل مکعبات دوجمله» است که به اتحاد «چاق و لاغر» نیز معروف است:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

با دقت به اتحادها می‌بینیم که یک سمت آن (سمت چپ) ضرب چند پرانتز است و سمت دیگر (سمت راست) یک عبارت چندجمله‌ای. هر یک از پرانتزهای ضرب شده را یک عامل یا فاکتور چندجمله‌ای می‌گوییم.

برای مثال در اتحاد مزدوج هر یک از $(a - b)$ یا $(a + b)$ را یک عامل $a^2 - b^2$ می‌گوییم.

اگر بتوانیم یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب چند پرانتز بنویسیم، گوییم عبارت را به عامل‌های آن «تجزیه» کرده‌ایم.

مثال ۱: حاصل را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(x + 2)^3 = x^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) + (2^3) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

ب) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$

مثال ۲: عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عامل‌های آن تجزیه کنید.

الف) $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$

ب) $8b^3 - 27 = (2b - 3)(4b^2 + 6b + 9)$

پ) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$

هر عبارت جبری را که پس از ساده کردن بتوانیم به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای بنویسیم، یک عبارت «گویا» می‌نامیم.

در واقع باید دقت کنیم که متغیر در زیر رادیکال نباشد.

مثال ۳: کدام عبارت‌ها گویا هستند؟

ت) $\frac{\sqrt{x}}{5}$

پ) $\frac{1}{x(x+2)}$

ب) $\frac{x}{\sqrt{5}}$

الف) $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

پاسخ: گزینه‌های (الف) و (ت) چون متغیر x زیر رادیکال است، پس گویا نیستند. یعنی گزینه‌های (ب) و (پ) گویا هستند.

نکته: در عبارت‌های گویا ممکن است به ازای برخی مقادیر متغیر، مخرج صفر شود. در این حالات می‌گوییم «عبارت گویا تعریف نشده است».

مثال ۴: عبارت $\frac{3x+1}{x+2}$ به ازای $x = -2$ تعریف نشده است.

$$\frac{3(-2)+1}{-2+2} = \frac{-5}{0}$$

برای این‌که مقادیری را که عبارت گویا را تعریف نشده می‌کنند، بیابیم کافی است ریشه‌های مخرج را به دست آوریم.

مثال ۵: عبارت $\frac{3x^2}{2x-5}$ به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

پاسخ:

تذکر مهم: در فصل توابع، دامنه‌ی توابع کسری را به همین روش به دست می‌آوریم. 

$$\text{دامنه} = R - \{ \text{ریشه‌های مخرج} \}$$

16

مثال ۶: عبارت $\frac{3x+2}{x^2+1}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{جواب ندارد}$$

پاسخ:

پس عبارت به ازای تمام مقادیر x تعریف نشده است.

 جمع و تفریق عبارتهای گویا:

جمع و تفریق عبارتهای گویا مانند جمع و تفریق کسرها است. اگر هم مخرج باشند، یکی از مخرجها را نوشته و صورتها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم.

اگر هم مخرج نباشند، ابتدا مخرجها را تجزیه کرده، سپس (ک.م.م) مخرجها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم:

(عاملهای غیرمشترک \times عاملهای مشترک با بیشترین توان = ک.م.م)

مثال ۷: حاصل عبارت را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{3}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2) - 1(x-6)}{(x-6)(x-2)} = \frac{3x-6-x+6}{(x-6)(x-2)} = \frac{2x}{(x-6)(x-2)}$$

توانهای گویا و عبارتهای جبری

فصل سوم

(همان‌طور که می‌بینید مخرج هر دو کسر تجزیه نمی‌شود، پس برای مخرج مشترک آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.)


$$\text{ب) } \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-7}{2x-2} = \frac{2(x+2) + (x-7)}{2(x-1)} = \frac{2x+4+x-7}{2(x-1)} = \frac{3x-3}{2(x-1)} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)} = \frac{3}{2}$$

ابتدا مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم: $2(x-1)$

عامل مشترک دو مخرج $(x-1)$

عامل غیرمشترک 2

پس $2(x-1)$ کم‌م

 توجه: اگر بخواهیم بدانیم دو عبارت جبری به ازای چه مقادیری باهم برابرند، باید دو کسر را با هم برابر قرار داده، طرفین وسطین کنیم، سپس معادله به دست آمده را حل کرده تا مقدار x (متغیر) به دست آید.

جواب به دست آمده را باید در عبارت گویا امتحان کنیم تا مخرج آن‌ها را صفر نکنند.

مثال ۸: دو عبارت گویای $\frac{4}{x-1}$ و $\frac{3}{x+2}$ به ازای چه مقدار x برابرند؟

$$\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x+2} \rightarrow 4(x+2) = 3(x-1) \rightarrow 4x+8 = 3x-3 \quad \text{پاسخ:}$$

$$4x-3x = -8-3 \rightarrow x = -11$$

چون $x = -11$ هیچکدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، این دو عبارت به ازای $x = -11$ برابرند.

گویا کردن مخرج کسر:

در سال گذشته با گویا کردن مخرج کسر آشنا شده‌اید.

برای گویا کردن مخرج کسر کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم. برای این کار دو حالت وجود دارد:

حالت اول: گویا کردن کسرهایی به صورت $\frac{1}{A+B\sqrt{C}}$:


صورت و مخرج را در مزدوج مخرج یعنی $A + B\sqrt{C}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{5}{\sqrt{x+1-2}} \times \frac{\sqrt{x+1+2}}{\sqrt{x+1+2}} = \frac{5(\sqrt{x+1+2})}{x-3} \quad \text{مثال ۹:}$$

حالت دوم: گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}$:

صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1} \quad \text{مثال ۱۰:}$$

تذکر: در واقع ما از دو اتحاد «مزدوج» و «چاق و لاغر» استفاده می‌کنیم. 

مثال ۱۱: مخرج کسرها را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{3 - \sqrt{7}} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$\text{پ) } \frac{3}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{3(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x - 8}$$

سوالات درس عبارتهای جبری

۲۴- درستی یا نادرستی عبارتها را مشخص کنید.

الف) وقتی $(2y - 3)^3$ را بسط می‌دهیم مجموع ضرایب y و y^2 برابر با ۱۸ است.

ب) عبارت $(\sqrt{2} - 1)^3$ برابر با $(4\sqrt{2} - 4)$ است.

پ) حاصل عبارت $(x^2 + a^2 - ax)(x^2 + a^2 + ax)(x + a)(x - a)$ همواره برابر صفر است.

ت) عبارت $X^3 + 8$ بر $X + 2$ بخش‌پذیر است.

ث) دامنه‌ی عبارت $\frac{x+1}{x^2+1}$ برابر با مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

ج) حاصل $(x + \frac{1}{x})^3 + (x - \frac{1}{x})^3$ برابر است با $2x^3 + \frac{6}{x^3}$

چ) اگر $a + b = 1$ و $a \neq b$ و $a^2 - a = b^2 - b$ آن گاه $a + b = 1$.

ح) حاصل عبارت $(a - 1)(a^2 + a + 1)$ برابر است با $(a^3 - 1)$.

خ) حاصل $\frac{2}{x+1} + \frac{2x+2}{x^2+x} + \frac{3x-2}{x}$ برابر است با $\frac{2}{x+1}$.

۲۵- کامل کنید.

الف) $(3x + \dots)(9x^2 - 6x + 4) = \dots + \dots$

ب) $(3a + \dots)(\dots - 12ab + \dots) = 27a^3 + \dots$

پ) $(a - \dots)(\dots + \dots + 4a^2) = a^3 + \dots$

ت) مقدار کسر $\frac{-3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ برابر است با \dots

ث) معکوس $1 - \sqrt{2}$ برابر است با \dots

ج) حاصل عبارت $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ به ازای $x = \sqrt[3]{-3}$ برابر با \dots است.

چ) اگر $x + \frac{1}{x} = 2$ باشد حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ برابر \dots است.

ح) اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ برابر با \dots خواهد شد.

خ) عبارت $\frac{7}{(3x+2)(x-1)}$ به ازای \dots و \dots تعریف نشده است.

(د) گویا شده‌ی عبارت $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ برابر است با

۲۶- هر عبارت از جدول ۱ را به عبارت مساوی آن در جدول ۲ وصل کنید.

	جدول ۱	جدول ۲
الف		$1 + 3a^2 + 3 + a^3$
ب		
پ	$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$	$(1 - a)(1 + a + a^2)$
ت	$1 - a^3$	$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
ث		$x^3 + 8$

۲۷- عبارت $(x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$ کدام است؟

الف) $x^{64} - 1$ ب) $x^{16} - 1$ پ) $x^{32} - 1$ ت) $x^{12} - 1$

۲۸- حاصل $A = (\sqrt{x} - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{2} + 1$ ب) $\sqrt{2} - 1$ پ) -1 ت) 1

۲۹- حاصل $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ کدام است؟

الف) $x^3 - 1$ ب) $x^3 + 1$ پ) x^3 ت) $x^3 + x + 1$

۳۰- حاصل $(2X + Y)(4X^2 - 2XY + Y^2)$ کدام است؟

الف) $2X^3 + Y^3$ ب) $2X^3 - Y^3$ پ) $8X^3 + Y^3$ ت) $8X^3 - Y^3$

۳۱- یکی از عامل‌های $2X^3 + 5X^2 + 2X$ کدام است؟

الف) $X - 1$ ب) $2X + 1$ پ) $X + 1$ ت) $2X - 1$

۳۲- تجزیه شده‌ی عبارت $X^2 + 4X + 4 - Y^2$ کدام است؟

الف) $(X + 4 + Y)(X + 4 - Y)$ ب) $(X + Y)(X + 2)$

پ) $(X + Y + 2)(X - Y + 2)$ ت) $(X + 2)(Y + 2)$

۳۳- عبارت $X^3 + 8$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

الف) $X^2 - 2X + 4$ ب) $X - 2$ پ) $X^2 + 2X + 4$ ت) $X^2 + 2$

۳۴- عبارت $X^3 - 8Y^3$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

الف) $X - 2Y$ ب) $X - Y$ پ) $X + Y$ ت) $X - 2$

۳۵- در تجزیه‌ی عبارت $X^4 + 2X^3 - X - 2$ کدام عامل وجود ندارد؟

الف) $X - 1$ ب) $X + 2$ پ) $X^2 + X + 1$ ت) $X^2 - X + 1$

۳۶- عبارت $X^5 - X^4 - 4X + 4$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

الف) $X^2 - 2$ ب) $X + 1$ پ) $X^2 + 2$ ت) $X - 1$

۳۷- عبارت $X^4 - 3X^2 - 4$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

ت) $x + 2$

پ) $x - 1$

ب) $x + 1$

الف) $x^2 + 2$

۳۸- حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد «مجموع و تفاضل مکعب دوجمله» به دست آورید.

الف) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) =$

ب) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) =$

پ) $(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4) =$

ت) $(5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2) =$

ث) $[(2x + y) - 3][(2x + y)^2 + 3(2x + y) + 9] =$

۳۹- عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $\frac{27}{8} + a^3 =$

ب) $a^3 - 8 =$

پ) $x^6 - y^6 =$

ت) $(x + 1)^3 - z^3 =$

ث) $27x - xy^3 =$

ج) $27x^3 + 64y^3 =$

۴۰- حاصل را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای به دست آورید.

الف) $(xa - by)^3 =$

ب) $(3x + 2)^3 =$

پ) $(3x - y)^3 =$

ت) $\left(\frac{4x}{3} + \frac{3y}{2}\right)^3 =$

ث) $(x^2 - 1)^3 =$

۴۱- تجزیه کنید.

الف) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$

ب) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{y^3}{27} =$

۴۲- تعیین کنید عبارت‌های زیر در چه نقاطی تعریف نشده است؟

الف) $\frac{1-2x}{x^2}$

ب) $\frac{x^2+1}{x-a}$

پ) $\frac{3x}{x^2-a^2}$

۴۳- اگر $A = \frac{3x+1}{x^2-1}$ و $B = \frac{-2}{x-1}$ دو عبارت گویا باشند، $A+B$ را به دست آورده و ساده کنید.

(هماهنگ کشوری)

۴۴- عبارت گویای $A = \frac{2}{x^2-9}$ داده شده است. اگر $A+B = \frac{x+7}{2x^2-18}$ باشد، B را به دست آورده و

ساده کنید. (هماهنگ کشوری)

۴۵- اگر نسبت $2x - y$ به $x + y$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت x به y چقدر خواهد بود؟

۴۶- مخرج هر کسر را گویا کرده و حاصل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{x-2}{x\sqrt{2} - 2\sqrt{x}}$

ب) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$

۴۷- حاصل عبارت زیر را به دست آورده و کسر را ساده کنید.

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$$

۴۸- در مجموعه‌ی $\left\{ \frac{x-1}{2x-6}, \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}, \frac{x^3-4x}{x^2+x} \right\}$ کدام عبارت گویا نیست؟

۴۹- اگر $x+y=10$ و $xy=7$ مقدار x^3+y^3 را حساب کنید.

۵۰- اگر $A = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$ و $B = (y-2)(y^2+2y+4) + 8$ باشد، حاصل

$(A+B)(A^2-AB+B^2)$ را به دست آورید.

۵۱- اگر $a + \frac{1}{a} = 3$ باشد، مطلوبست:

الف) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

ب) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

۵۲- اگر $x - \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^2 - \frac{1}{x^2}$ را با شرط $x > 0$ به دست آورید.

پاسخنامه فصل ۳

26

۱- الف) درست (ب) نادرست (پ) نادرست (ت) درست (ث) درست
 ج) درست (چ) درست (ح) نادرست (خ) نادرست (د) درست

۲- $0/001$ (ت) ۵ (پ) $\sqrt[5]{9}$ (ب) $\sqrt[5]{-2^5} = -2$ (الف)

۳- $-\sqrt[4]{2^4 \times 2} = -\sqrt[4]{32}$ (ح) ۶ (چ) $\sqrt[n]{a}$ (ج) $\sqrt{\sqrt{9 \times 2}} = \sqrt[10]{18}$ (ث)

۴- الف (ب) ۵- ب (پ) ۶- پ (ت) ۷- ت

۸- ب (الف) ۹- الف (ت) ۱۰- ت (ب) ۱۱- ب (الف) ۱۲- الف

۱۳- $\sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3}$ (الف)

ب) $\sqrt[3]{-250} = -\sqrt[3]{2 \times 5^3} = -5\sqrt[3]{2}$

۱۴- ابتدا ۳۲ و ۱۲۵ را به صورت تجزیه شده می‌نویسیم:

$$\sqrt[5]{(-32)^3} + 2\sqrt[3]{125} = \sqrt[5]{(-2^5)^3} + 2 \times \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[5]{-2^{15}} + 2 \times 5 = -2^3 + 10 = -8 + 10 = 2$$

۱۵- الف) همان‌طور که می‌دانیم $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ پس توان‌ها با هم برابرند. پایه‌ها را ضرب

کرده و یکی از توان‌ها را می‌نویسیم. پایه‌ها اتحاد مزدوج تشکیل می‌دهند، پس:

توان‌های
گویا و
عبارت‌های
جبری

فصل
سوم

$$(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times (\sqrt{6}+\sqrt{5})^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} = (6-5)^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 1^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} & (\sqrt[3]{2}-\sqrt{7})^{\sqrt{2}+1} \times (\sqrt[3]{2}+\sqrt{7})^{\sqrt{2}+\frac{1}{3}} = \\ & = \frac{(\sqrt[3]{2}-\sqrt{7})^{\sqrt{2}+1} \times (\sqrt[3]{2}-\sqrt{7})^{\sqrt{2}+1} \times (\sqrt[3]{2}+\sqrt{7})^2}{(\sqrt[3]{2})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2}-\sqrt{7})^2}{\frac{4}{3} - 49} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt[3]{8} > \sqrt{8} \\ \sqrt[3]{2} > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \end{aligned} \quad -16$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} & (\sqrt{2})^{-2} > 2^{-\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} (\sqrt{2})^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ 2^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{2} > 1 \\ 0 < \frac{1}{2} < 1 \end{array} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt[15]{9^8 \sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt[15]{9^8 \times \frac{1}{3}} = \sqrt[15]{3^{16} \times \frac{1}{3}} = \sqrt[15]{3^{15}} = \sqrt[15]{3^{15}} = \sqrt{3} \quad -17$$

۱۸- الف) طرفین تساوی را به توان $\sqrt{2}$ می‌رسانیم:

$$a^{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow (a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \rightarrow a^2 = 2^{\sqrt{2}} \xrightarrow[\text{جذر}]{a > 0} a = \sqrt{2^{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ب) طرفین را به توان $\sqrt[3]{\quad}$ می‌رسانیم:

$$\left(x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{12}\right)^{\sqrt[3]{3}} = \left(2\sqrt[3]{75}\right)^{\sqrt[3]{3}} \rightarrow x\sqrt[3]{9+\sqrt[3]{36}} = 2\sqrt[3]{225} \rightarrow x^{3+6} = 2^{15} \rightarrow x^9 = 2^{15}$$

الف) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

-۱۹

ب) $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$, $\sqrt[2]{3^1} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$

الف) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[9]{8}$

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[9]{8}$$

-۲۰

چون فرجه فرد است، ابتدا منفی را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم.

ب) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} = -\sqrt[6]{16}$$

$$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$$

-۲۱

الف) $\sqrt[4]{5^3} \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^3 \times 5} = \sqrt[4]{5^4} = \sqrt[2]{5^2} = \sqrt{5}$

-۲۲

ب) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{14}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{98}} = \sqrt[18]{98}$

پ) $\sqrt[5]{4} \div \sqrt[8]{8} = \sqrt[5]{2^2} \div \sqrt[8]{2^3} = 2^{\frac{2}{5}} \div 2^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{2}{5} - \frac{3}{8}} = 2^{\frac{16-15}{40}} = 2^{\frac{1}{40}} = \sqrt[40]{2}$

۲۳- الف) ابتدا ۶ را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + \sqrt{6^2 \times 2}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}}$$

$$c^2 = a^2 - b = 11^2 - 72 = 121 - 72 = 49 \rightarrow c = 7$$

سپس c^2 را به دست می‌آوریم:

ب) $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$

$$c^2 = 169 - 48 = 121 \rightarrow c = 11$$

پ) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) \left(\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right) \left(\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)\right) =$

پ) نادرست

ب) نادرست

۲۴- الف) درست

ج) نادرست

ث) درست

ت) درست

خ) نادرست

ح) درست

چ) درست

الف) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 27x^3 + 8$ -۲۵

حذر

ب) $(3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2) = 27a^3 + 64b^3$

$$\frac{12ab}{3a} = 4b$$

پ) $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) = a^3 + 8b^3$

حذر

مجذور

ت) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ث) $\sqrt{2} + 1$ ج) ۳

چ) ۲ ح) ۲۳۸ خ) $1, -\frac{2}{3}$ د) $4 + 3\sqrt{2}$

ب) $1 + 3a^2 + 3a + a^3$

۲۶- الف) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

ت) $(1 - a)(1 + a + a^2)$

پ) $x^3 + 8$

ث) $\frac{x^3}{8} - \frac{3}{4}x^2y + \frac{3}{2}xy^2 - y^3$

پ-۳۲

ب-۳۱

پ-۳۰

الف-۲۹

ت-۲۸

ب-۲۷

ت-۳۷

ب-۳۶

ت-۳۵

الف-۳۴

الف-۳۳

الف) $(2a)(4a^2) + (b)(b^2) = 8a^3 + b^3$ -۳۸

ب) $x^6 - 1$ پ) $27a^3 - 8$

ت) $125a^3 - 8b^3$ ث) $(2x + y)^3 - 27$

۳۹- ابتدا برای نوشتن پراتنز لاغر ریشه‌ی سوم $\frac{۲۷}{۸}$ و $a^۳$ را به دست آورده، با همان علامت می‌نویسیم.

برای نوشتن پراتنز چاق که سه جمله داریم:

$$\left(\text{جمله‌ی اول} \right)^۲ \pm \left(\text{جمله‌ی دوم} \right) \left(\text{جمله‌ی اول} \right) + \left(\text{جمله‌ی دوم} \right)^۲$$

عکس علامت پراتنز لاغر

31

الف) $\left(\frac{۳}{۲} + a \right) \left(\frac{۹}{۴} - \frac{۳a}{۲} + a^۲ \right)$

ب) $(a - ۲)(a^۲ + ۲a + ۴)$

پ) $(x^۲ - y^۲)(x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴) = (x - y)(x + y)(x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴)$

ت) $(x + ۱ - z)((x + ۱)^۲ + (x + ۱)z - z^۲)$

ث) $x(۲۷ - y^۳) = x(۳ - y)(۹ + ۳y + y^۲)$

ج) $(۳y + ۴x)(۹y^۲ - ۱۲xy + ۱۶x^۲)$

الف) $(xa - by)^۳ = (xa)^۳ - ۳(xa)^۲(by) + ۳(xa)(by)^۲ - (by)^۳ =$

-۴۰

ب) $(۳x + ۲)^۳ = (۳x)^۳ + ۳(۳x)^۲(۲) + ۳(۳x)(۲)^۲ + ۲^۳ = ۲۷x^۳ + ۵۴x^۲ + ۳۶x + ۸$

پ) $(۳x - y)^۳ = (۳x)^۳ - ۳(۳x)^۲(y) + ۳(۳x)y^۲ - y^۳ = ۲۷x^۳ + ۲۷x^۲y + ۹xy^۲ - y^۳$

ت) $\left(\frac{۴x}{۳} + \frac{۳y}{۲} \right)^۳ = \left(\frac{۴x}{۳} \right)^۳ + ۳ \left(\frac{۴x}{۳} \right)^۲ \left(\frac{۳y}{۲} \right) + ۳ \left(\frac{۴x}{۳} \right) \left(\frac{۳y}{۲} \right)^۲ + \left(\frac{۳y}{۲} \right)^۳ =$

$$= \frac{64x^3}{27} + 8x^2y + 9xy^2 + \frac{27y^3}{8}$$

ث) $(x^2 - 1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

الف) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$ -۴۱

ب) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{y^3}{27} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^3$

الف) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ در $x = 0$ تعریف نشده است -۴۲

ب) $x - a = 0 \rightarrow x = a$ در $x = a$ تعریف نشده است

پ) $x^2 - a^2 = 0 \rightarrow x^2 = a^2 \rightarrow x \neq a$ در $x \neq a$ تعریف نشده است

۴۳- ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده، سپس مخرج مشترک می‌گیریم.

$$A + B = \frac{x + 7}{2(x^2 - 9)} = \frac{x + 7}{2(x - 3)(x + 3)}$$
 -۴۴

توانم
ای
گویا و
عبارت A
های
جبری

فصل
سوم

B

B

۴۵- وقتی در مسئله کلمه‌ی نسبت می‌بینیم باید عبارات را به صورت کسری بنویسیم:

$$\frac{2x-y}{x+y} = \frac{2}{3}$$

حال طرفین وسطین کرده و عملیات ریاضی را انجام داده تا به نسبت $\frac{x}{y}$ برسیم:

$$3(2x - y) = 2(x + y) \rightarrow 6x - 3y = 2x + 2y$$

$$6x - 2x = 3y + 2y \rightarrow 4x = 5y \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

33

الف)
$$\frac{x-2}{x\sqrt{2}-2\sqrt{x}} \times \frac{(x\sqrt{2}+2\sqrt{x})}{(x\sqrt{2}+2\sqrt{x})} = \frac{(x-2)(x\sqrt{2}+2\sqrt{x})}{2x^2-4x} =$$
 -۴۶

$$= \frac{(x-2)(x\sqrt{2}+2\sqrt{x})}{2x(x-2)} = \frac{x\sqrt{2}+2\sqrt{x}}{2x}$$

ب)
$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \times \frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{(\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)} = \frac{(\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$$

۴۷- مرحله‌ی اول: مخرج مشترک گرفتن

مرحله‌ی دوم: گویا کردن مخرج کسر

۴۸-
$$\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$$
 چون متغیر x زیر رادیکال است.

۴۹- اتحاد مکعب دو جمله ای را می‌نویسیم:

حال مقدار مورد نظر مسئله را نگه داشته $(x^3 + y^3)$ و به جای بقیه عبارات، مقدار فرار می‌دهیم:

$$10^3 = x^3 + y^3 + 3(7)(10) \rightarrow 1000 - 210 = x^3 + y^3 \rightarrow x^3 + y^3 = 790$$

$$A = \underbrace{(x+1)^2}_a - \underbrace{2(x+1)}_{2ab} + \underbrace{1}_b = (x+1-1)^2 = x^2 \quad -50$$

$$51- الف) \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{اتحاد فرعی}} = (x+y)^2 - 2xy$$

می‌توانید این اتحاد فرعی را حفظ کنید. پس:

ب) در تمرین ۴۹ به اتحاد فرعی $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ رسیدیم. پس:

$$52- \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \star$$

پس باید مقدار $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ را محاسبه کنیم. طرفین $x - \frac{1}{x} = 4$ را به توان ۲ رسانده تا $x + \frac{1}{x}$ ایجاد شود.

از طرفی می‌دانیم: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$$\star \rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 4 \left(2\sqrt{5} \right) = 8\sqrt{5}$$