

## فصل اول

## احتمال

## فضای نمونه‌ای

فضای نمونه‌ای یعنی مجموعه‌ای که شامل همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش باشد و با  $S$  نشان می‌دهیم. اگر اعضای  $S$  قابل شمارش باشد آن را فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامند. حال به معرفی فضای نمونه‌ای‌های مهم می‌پردازیم:

$$n \text{ بار پرتاب یک سکه یا یک بار پرتاب } n \text{ سکه: } n(S) = 2^n$$

$$n \text{ بار پرتاب یک تاس یا یک بار پرتاب } n \text{ تاس: } n(S) = 6^n$$

$$n \text{ بار پرتاب } n \text{ تاس و } m \text{ سکه: } n(S) = 6^n \times 2^m$$

$$\text{خانواده‌ی } n \text{ فرزندی: } n(S) = 2^n$$

$$\text{یک فرزندی: } S = \{b, g\} \rightarrow n(S) = 2^1 = 2$$

$$\text{دو فرزندی: } S = \{(bb), (bg), (gb), (gg)\} \Rightarrow n(S) = 2^2 = 4$$

$$\text{سه فرزندی: } S = \left\{ \begin{array}{l} \text{یک حالت} \\ \text{سه حالت} \\ \text{سه حالت} \\ \text{یک حالت} \end{array} \right\} \Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$$

## تعریف پیشامد تصادفی و انواع آن:

هر زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، پیشامد می‌گویند. پیشامدها را هم با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. تعداد پیشامدها می‌شود:  $2^{n(S)}$

مجموعه پیشامدهای پرتاب یک سکه:  $\{\emptyset, \{r\}, \{p\}, \{r, p\}\}$

اگر پیشامدهای مثال بالا را از  $A_1$  تا  $A_4$  نامگذاری کنیم به پیشامد  $A_1 = \{\emptyset\}$  نشدنی و به پیشامد  $A_4 = S = \{r, p\}$  حتمی گوئیم.

زمانی گوئیم یک پیشامد رخ داده که نتیجه‌ی آزمایش، یکی از اعضای آن باشد.

پیشامد نشدنی احتمال وقوعش صفر و پیشامد حتمی همان فضای نمونه‌ای است که احتمال وقوعش صد درصد است.

نکته: این کلمات کلیدی را به خاطر داشته باشید.

و: یا: فقط: حداقل: حداکثر:

1- هر یک از اعداد زوج و طبیعی کوچک‌تر از 19 را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. (پ) پیشامد  $A$  که در آن عدد روی کارت بر 5 بخش پذیر باشد را مشخص کنید.

ب) پیشامد  $B$  که در آن عدد روی کارت اول یا فرد باشد را مشخص کنید. (ت) پیشامد  $(A \cap B)$  را مشخص کنید. (شهریور 93)

$$\text{الف) } S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} \quad \text{ب) } A = \{10\} \quad \text{پ) } B = \{2\} \quad \text{ت) } A \cap B = \emptyset$$

2- در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

اگر یک پدیده‌ی تصادفی رخ دهد و  $S$  فضای نمونه‌ای این پدیده یا آزمایش باشد، هر زیرمجموعه‌ی  $S$  را یک ..... در فضای نمونه‌ای  $S$  می‌نامیم. (دی 93)

3- یک سکه را سه بار می‌اندازیم. مطلوب است تعیین: (خرداد 86)

الف) فضای نمونه‌ای (ب) پیشامد  $A$  که در آن لااقل دوبار «رو» بیاید. (پ) پیشامد  $B$  که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود.

$$\text{الف) } S = \{(پ,پ,پ), (پ,پ,ر), (پ,ر,پ), (پ,ر,ر), (ر,پ,پ), (ر,پ,ر), (ر,ر,پ), (ر,ر,ر)\}$$

$$\text{ب) } A = \{(ر,ر,ر), (ر,ر,پ), (ر,پ,ر), (پ,پ,پ), (پ,پ,ر), (پ,ر,پ), (پ,ر,ر), (ر,ر,ر)\}$$

4- عددهای 1, 2, 3 و 4 را روی چهار کارت شبیه به هم نوشته و آن‌ها را در جعبه‌ای می‌ریزیم. اگر دو کارت را هم زمان بیرون بیاوریم فضای نمونه‌ای این

$$\text{آزمایش تصادفی را مشخص کنید. (دی 91) } S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

5- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (خرداد 91)

الف) هر زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ای راه یک ..... در فضای نمونه‌ای می‌نامیم.

ب) به پدیده‌هایی که از به وقوع پیوستن آن اطمینان نداشته باشیم، ..... می‌گوئیم.

پ) اگر اعضای فضای نمونه‌ای قابل شمارش باشد، آن را یک فضای نمونه‌ای ..... می‌نامیم.

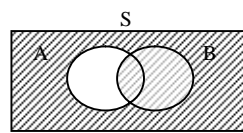
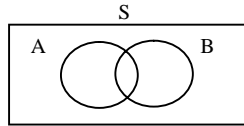
6- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد آن که سکه «رو» یا تاس 5 بیاید را مشخص کنید. (خرداد 92)  
 S = {(1, پ), (1, ر), (2, پ), (2, ر), (3, پ), (3, ر), (4, پ), (4, ر), (5, پ), (5, ر), (6, پ), (6, ر)}  
 الف) A = {(1, ر), (2, ر), (3, ر), (4, ر), (5, ر), (6, ر)}  
 ب) A = {(1, ر), (2, ر), (3, ر), (4, ر), (5, ر), (6, ر)}

7- خانواده‌ای دارای 3 فرزند است: الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن فرزند سوم پسر باشد را مشخص کنید. ب) پیشامد B که در آن حداکثر یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید. (خرداد 94)  
 الف)  $n(S) = 2^3 = 8$  ب)  $A = \{(d, d, P), (d, P, P), (P, P, P), (P, d, P)\}$   
 ب)  $B = \{(d, P, P), (P, d, P), (P, P, P), (P, P, d)\}$

8- با توجه به شکل مقابل، پیشامد  $(A - B)'$  را هاشور بزنید. (دی 94)



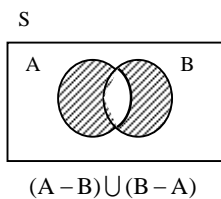
9- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

اگر اعضای فضای نمونه‌ای S, ..... باشد آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم. (شهریور 94)

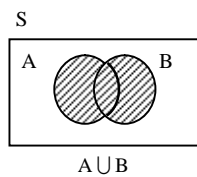
10- فرض کنیم A, B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. پیشامدهای زیر را به عبارت جبری مناسب وصل کنید و سپس نمودار ون هر یک را رسم نمایید.

- $(A \cap B)'$
- $(A - B) \cup (B - A)$
- $(A \cup B)'$
- $A \cup B$
- $A \cap B$

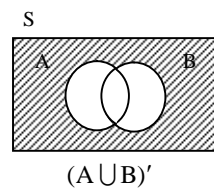
- الف) هر دو پیشامد اتفاق بیافتد
- ب) دست کم یکی از پیشامدها اتفاق بیافتد
- پ) هیچ یک از دو پیشامد اتفاق نیافتد
- ت) فقط یکی از دو پیشامد A, B اتفاق بیافتد



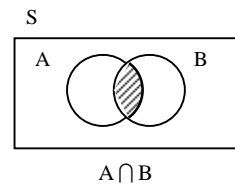
(ت)



(ب)



(ب)



(الف)

احتمال

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال وقوع پیشامد A را با  $P(A)$  نشان می‌دهیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد A}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S}} = \frac{\text{تعداد مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

از آنجایی که هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است داریم:

$$A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S) \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را به } n(S)} \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

متمم پیشامد A:

متمم پیشامد A را با  $A'$  یا  $\bar{A}$  نشان می‌دهیم. این پیشامد در صورتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

در احتمالات بین پیشامد A و  $A'$  رابطه‌ی روبرو برقرار است:  $P(A') = 1 - P(A)$

از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد سوال زیاد باشد. در این صورت متمم پیشامد را نوشته، احتمال وقوع آن را محاسبه می‌کنیم و حاصل را از یک کم می‌کنیم.

احتمال و خانواده:

مسئله‌های خانوادگی در احتمال زیاد مطرح می‌شود. توجه به فضای نمونه‌ای تولد فرزندان مهم است.

احتمال (سکه - مهره - تاس - مجموعه‌های اعداد):

در سوالات مربوط به تاس حتما فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس را در نظر بگیرید. گاهی مجموع دو تاس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بعضی از این مسائل توجه به این نکته ضروری است که: «مجموع دو عدد زمانی زوج می‌شود که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند و مجموع دو عدد زمانی فرد می‌شود که یکی از آن دو عدد فرد باشد.»

1- در کیسه‌ای 5 مهره سفید و 4 مهره آبی و 3 مهره سبز وجود دارد. از این کیسه 4 مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر 2 مهره آبی باشد، چقدر است؟ (خرداد 93)

$$n(s) = \binom{12}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2} + \binom{4}{1}\binom{8}{3} + \binom{4}{0}\binom{8}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{462}{495}$$

2آبی، یک آبی، صفر آبی

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

2- می‌خواهیم از بین 6 دانش‌آموز کلاس سوم و 5 دانش‌آموز کلاس دوم یک تیم 4 نفره به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد.

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس سوم در تیم نباشد. ب) یک دانش‌آموز کلاس سوم و سه دانش‌آموز کلاس دوم در تیم باشند. (شهریور 93)

$$n(S) = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \times 7!} = 330 \quad \text{و} \quad n(A) = \binom{5}{4} = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{330} \quad \text{الف)}$$

$$n(B) = \binom{6}{1} \times \binom{5}{3} = 60 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{330} \quad \text{ب)}$$

3- از جعبه‌ای که حاوی 10 سیب سالم و 4 سیب خراب است، 3 سیب به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یکی خراب باشد. پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر باشد. (دی 93)

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{300}{364} \quad \text{پ)}$$

$$P(B) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{180}{364} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{120}{364} \quad \text{الف)}$$

4- در جعبه‌ای 4 مهره سفید و 7 مهره سیاه موجود است. دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم احتمال هریک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

الف) دو مهره غیر هم رنگ باشند. ب) حداکثر یک مهره سفید باشد. (دی 91)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1}\binom{7}{1} + \binom{7}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{49}{55} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{28}{55} \quad \text{الف)}$$

5- خانواده‌ای 3 فرزند دارد: الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) احتمال آن که خانواده فقط یک دختر داشته باشد را محاسبه کنید.

پ) احتمال آن که خانواده حداقل 2 پسر داشته باشد را محاسبه کنید. (شهریور 91)

$$S = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,د), (پ,د,پ), (پ,پ,د), (پ,پ,پ)\} \Rightarrow n(S) = 8 \quad \text{الف)}$$

$$A = \{(د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,پ)\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} \quad \text{ب)}$$

$$B = \{(د,پ,د), (د,پ,پ), (پ,د,د), (پ,د,پ)\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{پ)}$$

6- چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی 3 نفره

الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند. ب) هیچ دونفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟ (خرداد 93)

$$P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{110}{144} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^3 \quad \text{الف)}$$

7- برای تشکیل تیمی 5 دانش آموز سال سوم و 4 دانش آموز سال اول داوطلب شده‌اند، به تصادف سه دانش آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را پیدا کنید که: الف) حداکثر 1 نفر سال اولی باشد. ب) هیچ کدام از سه نفر دانش آموز انتخاب شده، سال سومی نباشند (محاسبه‌ی جواب‌های پایانی الزامی نیست) (خرداد 90)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} \quad \text{الف)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} \quad \text{ب)}$$

8- از جعبه‌ای که شامل 5 مهره‌ی سبز و 4 مهره‌ی آبی و 2 مهره‌ی زرد می‌باشد، 3 مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که: الف) فقط دو مهره آبی باشد ب) هر 3 مهره هم رنگ باشند. (دی 91)

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165 \quad \text{و} \quad n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} = 6 \times 7 = 42 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{42}{165} \quad \text{الف)}$$

$$n(B) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{14}{165} \quad \text{ب)}$$

9- از میان 5 دانش آموز مطلوب است احتمال این که الف) روز تولد همگی روز یکسانی از هفته باشد. ب) هیچ دونفری در یک ماه متولد نشده باشند. (دی 91)

$$P(B) = \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^4 \quad \text{الف)}$$

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \quad \text{ب)}$$

10- ظرف A شامل 4 مهره قرمز و 3 مهره آبی و ظرف B شامل 2 مهره قرمز و 3 مهره آبی است. از یکی از دو ظرف یک مهره به تصادف انتخاب کرده‌ایم.

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{70} \quad \text{احتمال این که این مهره آبی باشد چقدر است؟ (دی 91)}$$

11- از جعبه‌ای که شامل 4 مهره سفید و 3 مهره سبز و 2 مهره سیاه می‌باشد، 3 مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که: الف) فقط 2 مهره سفید باشد ب) حداکثر 2 مهره سبز باشد. (خرداد 91)

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84 \quad n(A) = \binom{4}{2}\binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84} \quad \text{الف)}$$

$$P(B) = 1 - P(B)' = 1 - \frac{1}{84} = \frac{83}{84} \quad n(B)' = \binom{3}{3} = 1 \Rightarrow P(B)' = \frac{n(B)'}{n(S)} = \frac{1}{84} \quad \text{ب)}$$

12- می‌خواهیم از بین 5 مرد و 3 زن یک کمیته 3 نفری انتخاب کنیم مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن که الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود. ب) هر سه مرد باشند. (خرداد 92)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{16}{56} \quad \text{الف)}$$

13- 5 نفر که دو نفر آن‌ها خواهر هستند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. چقدر احتمال دارد: الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند. ب) دوخواهر در اول و آخر صف واقع شده باشند. (خرداد 94)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{1}{10} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2!}{5!} = \frac{2}{5} \quad \text{الف)}$$

14- 4 نفر را در نظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر 4 نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند. ب) هیچ دونفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند. (دی 94)

$$P(B) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{7^3} \quad \text{ب)}$$

$$P(A) = \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \quad \text{الف)}$$

15- می‌خواهیم از بین 4 دانش‌آموز کلاس اول و 6 دانش‌آموز کلاس دوم، یک تیم 3 نفره به تصادف انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد:

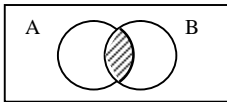
الف) هیچ دانش‌آموز کلاس اول در تیم نباشد ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس اول بیشتر باشد. (شهریور 94)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1}}{120} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \text{ (ب)}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \text{ (الف)}$$

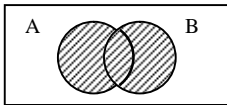
اعمال روی پیشامدها و حالت‌های خاص مهم:

اشتراک دو پیشامد:



اگر A و B دو پیشامد باشند،  $A \cap B$  زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ داده باشد.

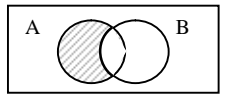
اجتماع دو پیشامد:



اگر A و B دو پیشامد باشند،  $A \cup B$  زمانی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای A و B یا هر دو رخ داده باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تفاضل دو پیشامد:



اگر A و B دو پیشامد باشند  $A - B$  زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B ندهد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$$

دو پیشامد ناسازگار:

اگر  $A \cap B = \phi$  (دو پیشامد A و B نتواند با هم رخ دهند) دو پیشامد را ناسازگار نامیم. در این صورت احتمال وقوع پیشامد A یا B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پیشامدهای مستقل:

دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم هرگاه وقوع یکی از این دو در احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد.

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند احتمال وقوع پیشامد A و B از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

تذکره: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، احتمال وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

چون دو پیشامد مستقل هستند داریم  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$  پس رابطه‌ی فوق به صورت زیر درمی‌آید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

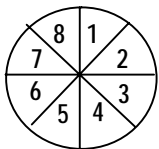
1- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند و  $A \cap B = \phi$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد ..... گوئیم.

ب) اگر  $A \subseteq S$  و A متمم A باشد، آن‌گاه  $A \cap A' = \dots\dots\dots$  و  $A \cup A' = \dots\dots\dots$

2- عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از 8 ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد عقربه،

عددی اول یا فرد را نشان دهد؟



$$n(S) = \binom{8}{1} = 8$$

A = {2,3,5,7} = عقربه عدد اول باشد

یا

B = {1,3,5,7} = عقربه فرد باشد

$$\left. \begin{array}{l} \binom{4}{1} = 4 \\ \binom{4}{1} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 4 = 8$$

$$A \cap B = \{3,5,7\} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

3- روی 9 کارت اعداد 1 تا 9 را نوشته و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم، اگر دو کارت را به تصادف و یکی یکی بدون جایگذاری از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو کارت، عددی زوج باشد؟ جمشان زوج شده است، پس یا هر دو زوج و یا هر دو فرد بوده‌اند.

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{12}{72} + \frac{20}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

زوج: {2,4,6,8} و فرد: {1,3,5,7,9}

4- چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم 6 نفره) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟

احتمال اینکه یک نفر در یک ماه خاص به دنیا آمده باشد  $\frac{1}{12}$  است و چون تولد افراد در ماه‌های سال، پیشامد مستقل است داریم:

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^6$$

5- احتمال این که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد چقدر است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$$

6- چقدر احتمال دارد در یک کلاس 25 نفری روز تولد هیچ دوفتری یکسان نباشد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{341}{365}$$

تا 25

7- 6 نفر که دو نفر آنها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند.

الف) چقدر احتمال دارد دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند؟ ب) چقدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند؟

الف) دو برادر را در کنار هم یک نفر فرض می‌کنیم، البته دوبرادر می‌توانند جابجا شوند یعنی 2! جایگشت دارند.  $n(S) = 6! = 72$

$$n(A) = 5! \cdot 2! \quad P(A) = \frac{5! \cdot 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{ب) } \boxed{b} \square \square \square \square \boxed{b'} \Rightarrow \frac{4! \times 2!}{6!} = \frac{1}{15}$$

جایجایی دو برادر

8- از بین 5 داوطلب گروه ریاضی و 3 داوطلب گروه تجربی، به تصادف 3 نفر برای انجام آزمون معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دوفتر معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 30 \\ n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! 5!} = 56 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

### قانون جمع احتمالات و پیشامدهای مستقل (احتمال کل)

1- احتمال انتقال بیماری به فرزند پسر 10% و دختر 20% است. احتمال این که بچه‌ای که به دنیا می‌آید سالم باشد چقدر است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{احتمال سالم بودن فرزند پسر} \quad \frac{1}{2} \times \frac{90}{100} = \frac{45}{100} \\ \text{احتمال سالم بودن فرزند دختر} \quad \frac{1}{2} \times \frac{80}{100} = \frac{40}{100} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{45}{100} + \frac{40}{100} = \frac{85}{100}$$

2- در کیسه‌ی اول 5 مهره آبی و 3 مهره قرمز و در کیسه دوم 7 مهره آبی و یک مهره قرمز وجود دارد. می‌خواهیم یکی از کیسه‌ها را انتخاب کنیم و یک مهره از آن خارج کنیم، احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16} \quad \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{16} + \frac{7}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

3- آزمایش انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از پیوند کلیه 80% و احتمال بهبود شخص B پس از این عمل، 60% است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال این که:

الف) هر دو نفر سلامتی خود را به دست آورند؟  
ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد؟

الف) هر دو نفر سلامتی را بدست آورند یعنی هم A خوب شود و هم B. یعنی اشتراک این دو پیشامد و چون این دو پیشامد مستقل از هم هستند داریم:

$$\frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{12}{25} = 48\%$$

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد یعنی اجتماع دو پیشامد (هم A خوب شود هم B) - (B خوب شود) + (A خوب شود)

$$\frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{48}{100} = \frac{92}{100}$$

4- احتمال قبولی علی در کنکور 0/3 و احتمال قبولی حسن در کنکور 0/4 است. احتمال آن که حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند، چقدر است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} - \left(\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}\right) = \frac{58}{100} \quad (\text{دی } 91)$$

5- دو جعبه A، 5 مهره سفید و 3 مهره سیاه و در جعبه B، 4 مهره سفید و 2 مهره سیاه وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره سیاه باشد. (شهریور 90)

$$P(\text{سیاه بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{17}{48}$$

6- سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است، آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟ (فضای نمونه و هریک از پیشامدی را مشخص کنید) (خرداد 90)

$$S = \{(ر,ر,ر), (ر,ر,پ), (ر,پ,ر), (ر,پ,پ), (پ,ر,ر), (پ,ر,پ), (پ,پ,ر), (پ,پ,پ)\}$$

$$A = \{(ر,ر,ر), (ر,ر,پ), (ر,پ,ر), (پ,ر,ر)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} \quad B = \{(ر,ر,ر), (پ,ر,ر)\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{8}$$

$$A \cap B = \{(ر,ر,ر), (پ,ر,ر)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} \quad \left. \begin{array}{l} P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{8} \neq \frac{2}{8}$$

A و B مستقل نیستند

7- در جعبه A، 3 مهره سفید و 2 مهره سیاه و در جعبه B، 5 مهره سفید و 3 مهره سیاه وجود دارد. از هر جعبه یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آن که دو مهره هم رنگ نباشند، کدام است؟

(از جعبه A سیاه و از جعبه B سفید) یا (از جعبه A سفید و از جعبه B سیاه) = (هم رنگ نبودن)

$$P(\text{هم رنگ نبودن}) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{8}\right) = \frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40}$$

8- احتمال آن که دانش‌آموزی در درس ریاضی قبول شود 0/7 و احتمال این که در درس شیمی قبول شود 0/85 و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود 0/6 است. احتمال آن که حداقل در یکی از دروس ریاضی و شیمی قبول شود چقدر است؟ (خرداد 90)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/85 - 0/6 = 0/95$$

9- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، رابطه‌ی  $A \cap B \neq \phi$  برقرار است.

ب) اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد  $A - B$  زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. (خرداد 94)

$$P(A \cup A') = 1 \quad (\text{پ})$$

10- اگر  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B') = \frac{3}{4}$  و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل  $P(A \cup B)$  را بدست آورید. (خرداد 93)

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

11- احتمال قبولی علی و محمد در المپیاد زیست‌شناسی به ترتیب برابر 80% و 60% است. احتمال هریک از پیشامدهای زیر را بدست آورید. (خرداد 92)

الف) هر دو آن‌ها را در المپیاد قبول شوند. ب) حداقل یکی از آنها در المپیاد قبول شوند

A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند در نتیجه:

$$\text{الف)} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/80 = 0/48$$

$$\text{ب)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/60 + 0/80 - 0/48 = 0/92$$

12- در جاهای خالی عبارت یا عدد مناسب قرار دهید. (دی 94)

الف) در فضای نمونه‌ای S، پیشامد  $\phi$  را پیشامد ..... می‌نامیم.

ب) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S باشند،  $P(B) = 0/1$ ،  $P(A \cup B) = 0/7$ ، باشد آن‌گاه  $P(A)$  برابر ..... است.

13- تاسی را دوبار می‌اندازیم، الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد رد شده تاس اول 3 باشد را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس 7 باشد را مشخص کنید.

د) مستقل بودن یا نبودن دو پیشامد A و B را با دلیل بررسی کنید. (شهریور 94)

$$\text{الف) } n(S) = 36 \quad \text{ب) } A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \quad \text{ج) } B = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$\text{د) } P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \quad \text{بله مستقل هستند}$$

14- یک خانواده 4 فرزندی را در نظر بگیرید اگر A پیشامد آن باشد که در آن آخرین فرزند پسر باشد و B پیشامد آن باشد که در آن فقط دو فرزند پسر باشد

بررسی کنید. الف) آیا دو پیشامد A و B مستقل اند؟ ب) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ (دی 91)

$$\text{الف) } A = \{(پ,پ,پ,پ), (پ,پ,پ,د), (پ,پ,د,پ), (پ,پ,د,د), (د,پ,پ,پ), (د,پ,پ,د), (د,د,پ,پ), (د,د,پ,د), (د,د,د,پ), (د,د,د,د)\} \Rightarrow n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{8}{16}$$

$$B = \{(پ,د,پ,پ), (پ,د,پ,د), (پ,د,د,پ), (پ,د,د,د), (د,پ,د,پ), (د,پ,د,د), (د,د,پ,پ), (د,د,پ,د)\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{16}$$

$$A \cap B = \{(پ,د,پ,پ), (پ,د,پ,د), (پ,د,د,پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{16}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{8}{16} \times \frac{6}{16} \Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{3}{16} \Rightarrow \text{پیشامدهای A و B مستقل اند}$$

ب) چون  $A \cap B \neq \phi$  پس این پیشامدها سازگارند.

15- احتمال این که شخصی گروه خونی  $B^+$  داشته باشد 30% و احتمال این که او ناراحتی کلیه داشته باشد 15% است، چقدر احتمال دارد: الف) این شخص گروه خونی

$B^+$  و ناراحتی کلیه داشته باشد. ب) این شخص گروه خونی  $B^+$  یا ناراحتی کلیه داشته باشد. (خرداد 92)

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{30}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{45}{1000}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} + \frac{15}{100} - \frac{45}{1000} = \frac{405}{1000}$$

16- احتمال این که فرزند خانواده‌ای A با رنگ چشم روشن متولد شود 0/6 و همین احتمال برای خانواده B برابر 0/5 می‌باشد. مطلوب است احتمال این که

الف) فرزندان هر دو خانواده با رنگ چشم روشن متولد شوند.

ب) حداقل فرزند یکی از دو خانواده با رنگ چشم روشن متولد شود. (دی 91)

$$\text{الف) } P(A) = 0/6, \quad P(B) = 0/5 \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/5 = 0/3$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/5 - 0/3 = 0/8$$



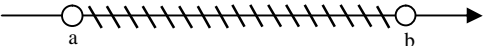
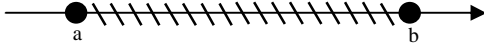
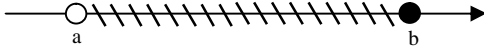
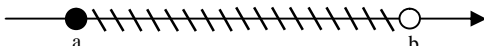
## فصل دوم

## تابع

## اجتماع و اشتراک بازه‌ها

در حل یک معادله، جواب‌ها برحسب درجه‌ی معادله چند عدد می‌باشد ولی جواب‌های یک نامعادله معمولاً یک بازه است. پس قبل از شروع روش‌های حل نامعادله، توضیحاتی در مورد انواع بازه‌ها ارائه می‌دهیم.

$(a, b)$  یک بازه‌ی باز است یعنی  $a$  و  $b$  در بازه قرار ندارند.  $[a, b]$  یک بازه‌ی بسته است یعنی  $a$  و  $b$  در بازه قرار دارند. بازه‌های  $(a, b)$  و  $[a, b]$  نیمه باز هستند.

$(a, b)$		$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
$[a, b]$		$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
$[a, b)$		$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

## معادلات گویا:

\* در حل معادلاتی که به صورت تساوی دو کسر هستند بهتر است هر دو کسر را به یک طرف تساوی برده و پس از مخرج مشترک‌گیری، صورت کسر حاصل را مساوی با صفر قرار دهیم.

\* در حل معادلاتی که از سه کسر تشکیل شده یکی از کسرهای آن را که مخرجش به صورت حاصل ضرب دو مخرج دیگری است سمت چپ تساوی و دو کسر دیگر را سمت راست تساوی قرار می‌دهیم. سپس از عبارت سمت راست مخرج مشترک می‌گیریم، مخرج‌های دو طرف تساوی را با هم ساده می‌کنیم و به حل معادله حاصل می‌پردازیم.

تذکر: در معادلات گویا جواب‌های نهایی را باید بررسی کنیم تا مخرج‌ها به ازای آن مقادیر صفر نشوند.

1- معادله گویای زیر را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+3) - (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 4x - x + 4 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

چون مخرج به ازای  $x = \frac{1}{2}$  صفر نمی‌شود پس جواب معادله است.

2- معادله گویای زیر را حل کنید.

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} = \frac{(1+x)(x-2) + x(x-1)}{x(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = x - 2 + x^2 - 2x + x^2 - x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow \text{مخرج را صفر می‌کند پس غیر قابل قبول} \\ x = -2 \Rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$$

نامعادلات گویا

برای حل نامعادلات گویا ابتدا همه را به یک طرف نامساوی می بریم سپس منفرج مشترک می گیریم.

1- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف)  $-1 \leq 2x - 1 < 3 \Rightarrow 0 \leq 2x < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 2$  ب)  $3 < \frac{x-1}{2} \leq 5 \Rightarrow 6 < x-1 \leq 10 \Rightarrow 7 < x \leq 11$

پ)  $-1 < \frac{x}{2} + 1 \leq 4 \Rightarrow -2 < \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow -4 < x \leq 6$  ت)  $4 \leq 2-x < 6 \Rightarrow 2 \leq -x < 4 \Rightarrow -4 < x \leq -2$

ث)  $\frac{x+1}{2} > 2x-1 \xrightarrow{\text{در 2 ضرب می کنیم}} x+1 > 4x-2 \Rightarrow 1+2 > 4x-x \Rightarrow 3 > 3x \Rightarrow x < 1$

ج)  $\left| \frac{2x-1}{2} \right| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{2x-1}{2} \leq 3 \Rightarrow -6 \leq 2x-1 \leq 6 \Rightarrow -5 \leq 2x \leq 7 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$

چ)  $-3 \leq x^2 - 1 < 8 \Rightarrow -2 \leq x^2 < 9 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow x \in (-3, 3)$

2- اگر  $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{5}{x} \geq 2 \right\}$  و  $B = (-1, 2)$  باشد. الف) مجموعه ی A را تعیین کنید.

ب) مجموعه ی  $A \cap B$  را به وسیله بازه نمایش دهید. (خرداد 93)

الف)  $\frac{5}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{5-2x}{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 5-2x=0 \rightarrow x=\frac{5}{2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \frac{5}{2}\right]$

	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$	+	+	0	-
$x$	-	0	+	+
		-	+	-

ب)  $A = \left(0, \frac{5}{2}\right]$  و  $B = (-1, 2) \Rightarrow A \cap B = (0, 2)$

ت ن

3- اگر  $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{|x-2|}{3} \leq \frac{1}{2} \right\}$  و  $B = [0, 3)$  باشند، حاصل  $A \cap B$  را به صورت بازه بنویسید. (خرداد 89)

$|x-2| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x-2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow A \cap B = \left[\frac{1}{2}, 3\right)$

4- اگر  $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{x-1}{3} < 2 \right\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x+1| \leq 2\}$  باشند.  $A \cup B, A \cap B$  را به صورت بازه بنویسید. (خرداد 88)

$A: -3 < x-1 < 6 \Rightarrow -2 < x < 7 \Rightarrow A \cap B = (-2, 1]$

$B: -2 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1 \Rightarrow A \cup B = [-3, 7)$

5- نامعادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید. (خرداد 90)

$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} > -1$   
 $\frac{x^2 - x^2 + 1}{x^2 + x} > -1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} > 0$   
 چون  $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + x > 0$   
 جواب  $= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x^2 + x$	+	0	-	+
		جواب		جواب

6- به ازای چه مقدار a، معادله ی  $\frac{x+a}{x} - \frac{x}{x+a} = \frac{4a}{x+a}$  دارای جواب  $x=1$  است (خرداد 94)

$\frac{1+a}{1} - \frac{1}{1+a} = \frac{4a}{1+a} \Rightarrow \frac{a^2 + 2a + 1 - 1 - 4a}{1+a} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2, a = 0$

7- نامعادله  $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$  را حل کنید و مجموعه‌ی جواب را به صورت بازه نشان دهید. (خرداد 92)

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1 \\ (2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2 \end{cases}$$

جواب =  $[-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$

	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	+	○	-	-	-	○	+
$(2x-1)(x-2)$	+	+	○	-	○	+	+
کسر	+	○	-	+	-	○	+

ت ن                      ت ن

8- نامعادله  $x - 2 \geq \frac{2x-1}{x+2}$  را حل کنید و سپس مجموعه‌ی جواب آن را به صورت بازه بنویسید. (خرداد 91)

$$\frac{(x-2)(x+2) - 2x + 1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4 - 2x + 1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{x+2} \geq 0$$

مجموعه‌ی جواب =  $(-2, -1] \cup [3, +\infty)$

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	+	+	○	-	○	+
$x+2$	-	○	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 2x - 3}{x+2}$	-	+	○	-	○	+

ت ن                      جواب ت ن                      جواب

9- نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب را به صورت بازه نشان دهید. (شهریور 94)

$$\frac{6-x^2}{x} > 1 \Rightarrow \frac{6-x^2}{x} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x^2-x}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6-x^2-x=0 \Rightarrow x=-3, x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب =  $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$

x		-3	○	2		
$6-x^2-x$	-	○	+	+	○	-
x	-	-	○	+	+	+
$\frac{6-x^2-x}{x}$	+	○	-	+	○	-

ت ن

10- نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب را به صورت بازه نشان دهید. (دی 94)

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} \geq 1$$

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x-4}{x^2-3x+2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-4=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2 \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب =  $(2, +\infty)$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$4x-4$	-	○	+	+	
$x^2-3x+2$	+	○	-	○	+
$\frac{4x-4}{x^2-3x+2}$	-	-	-	+	

ت ن

مثال‌ت: این روابط را به خاطر بسپارید

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha \pm \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

1- فرض کنید  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد. حاصل  $\sin 2\alpha$  را بدست آورید. (خرداد 93)

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

2- فرض کنید  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد. حاصل  $\cos 2\alpha$  را بدست آورید. (دی 93)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{16}{25}\right) = -\frac{7}{25}$$

3- اگر  $\alpha$  زاویه‌ای حاده و  $\beta$  زاویه‌ای منفرجه و  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  و  $\sin \beta = \frac{2}{5}$  باشد. حاصل  $\sin(\alpha + \beta)$  را بدست آورید (دی 91)

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{21}}{5} \xrightarrow{\text{منفرجه } \beta} \cos \beta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-\sqrt{21}}{15} + \frac{2\sqrt{8}}{15} = \frac{-\sqrt{21} + 2\sqrt{8}}{15}$$

4- درستی تساوی زیر را ثابت کنید. (خرداد 91)

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{ثبات: } \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

5- مطلوب است محاسبه  $\cos 75^\circ$  (شهریور 91)

$$\cos(75^\circ) = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

6- مطلوب است محاسبه  $\sin 105^\circ$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

7- مطلوب است محاسبه  $\tan 22/5^\circ$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \xrightarrow{x=45} \tan 22/5^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

8- مطلوب است محاسبه  $\cot 15^\circ$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

9- عبارت  $\sin(x + \frac{\pi}{4})$  را ساده کنید. (شهریور 93)

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

10- درستی برابری مقابل را ثابت کنید. (خرداد 94)

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

11- اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای منفرجه باشد، حاصل  $\tan 2\alpha$  را بدست آورید. (خرداد 92)

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 - (-\frac{3}{4})^2} = -\frac{24}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

12- درستی رابطه مقابل را نشان دهید. (خرداد 91)

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{2}{\sin 2\theta} \Rightarrow$$

13- درستی رابطه مقابل را اثبات کنید. (دی 91)

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \times \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

14- اگر  $\sin \theta = \frac{5}{7}$  و  $\theta$  منفرجه باشد حاصل  $\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$  را محاسبه کنید. (دی 91)

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2(\frac{5}{7})^2 = 1 - \frac{50}{49} = \frac{-1}{49} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (\frac{5}{7})^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{24}}{7} \xrightarrow{\theta \text{ منفرجه}} \cos \theta = -\frac{\sqrt{24}}{7} \Rightarrow \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{49}}{-\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{\sqrt{24}}{168}$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

15- درستی تساوی مقابل را ثابت کنید. (دی 94)

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \times 1 = \cos 2x$$

درستی تساوی  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$  را ثابت کنید. (شهریور 92)

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

دامنه

در تعیین دامنه‌ی توابع به دو نکته زیر توجه کنید.

\* مخرج کسر نباید صفر شود \* عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، همواره نامنفی است.  
دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$4) f(x) = \frac{2}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$5) f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8} \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2,4\}$$

$$6) f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{2x^2-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ اگر فرجه‌ی رادیکال فرد باشد دامنه تابع، همان دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال است.}$$

$$8) f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = D_g \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$9) f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$10) f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$11) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$12) f(x) = \sqrt{-x^2-x+2}$$

$$-x^2-x+2 \geq 0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 1]$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
P	-	○	+	○

$$13) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$14) f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$15) f(x) = x\sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

$$16) f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$17) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow \begin{matrix} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$18) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$$

	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x-2$	-	-	○	+
$x+2$	-	○	+	+
	+	-	○	+

ت ن

$$19) f(x) = \frac{1 + \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [-2, +\infty) - \{0\}$$

$$20) f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-9} \Rightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x^2-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (-\infty, 2] - \{-3\}$$

$$21) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-2, 2] - \{0\}$$

$$22) h(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \frac{1}{x-4} & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow D_h = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$

$$23) g(x) = \begin{cases} x+1 & -3 < x \leq 2 \\ 3x-4 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_g = (-3, 4]$$

$$\log_{g(x)} f(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases} \text{ توجه:}$$

$$24) y = \log(x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$25) y = \log_3(x^2-1) \Rightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{یا} \\ x < -1 \end{cases}$$

$$26) y = \log(x^2-4x+3) \Rightarrow x^2-4x+3 > 0 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$P$	+	○	-	○	+

$$\rightarrow D_y = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

$$27) y = \log_x(4-x^2) \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_y = (0, 2) - \{1\}$$

$$28) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [-2, 0) \cup (0, 2]$$

$$29) f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} - \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$30) f(x) = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{x \mid 2x - \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تابع: مجموعه زوج‌های مرتبی که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه‌های اول برابر نباشند.

تلاقی منحنی با محورها و یافتن ضرایب مجهول:

\* تلاقی با محور  $y$  ها:  $x = 0$

\* تلاقی با محور  $x$  ها:  $y = 0$

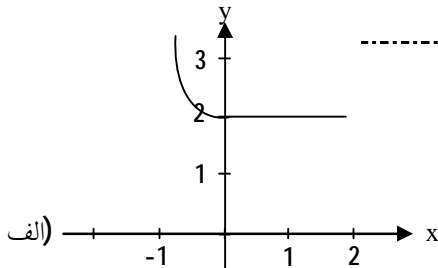
\* نقطه تقاطع دو منحنی در ضابطه‌ی هر دو صدق می‌کند.

\* مختصات هر نقطه از منحنی در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند.

$$x_s = \frac{-b}{2a} \rightarrow y_s = f(x_s)$$

\* در  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه  $S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  راس منحنی است.

\* اگر  $a > 0$  نمودار min دارد و اگر  $a < 0$  نمودار max خواهد داشت.

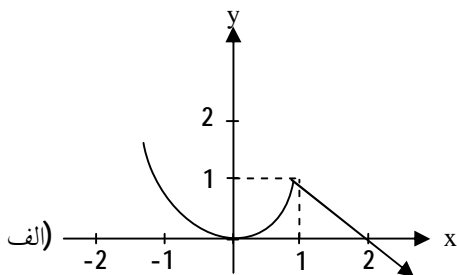


1- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. (خرداد 93)

(ب) دامنه‌ی تابع  $f$  را بدست آورید.

(الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

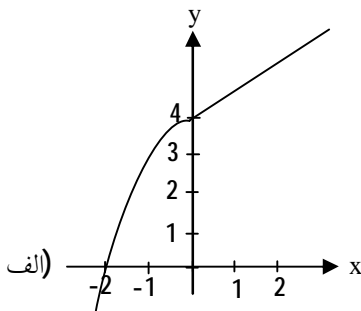
$$D_f = R - \{0\}$$



2- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$  داده شده است. (شهریور 93)

(الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

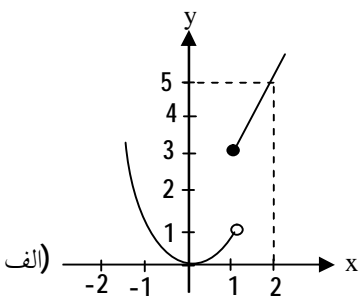
(ب) مقدار  $f(f(-2))$  را محاسبه کنید.  $f(-2) = 4 \Rightarrow f(f(-2)) = -2$



3- تابع  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 0 \\ x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$  داده شده است. (دی 93)

(الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

(ب) مقدار  $f(f(-1))$  را محاسبه کنید.  $f(-1) = 3 \Rightarrow f(f(-1)) = 7$



4- تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. (خرداد 90)

(الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

(ب) حاصل  $f(f(-1))$  را بدست آورید.

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(f(-1)) = f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

5- ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 + 5 & x \geq 0 \end{cases}$  می‌باشد. مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که  $f(-2) = 3$  و نمودار تابع از نقطه  $A(2, -3)$  بگذرد. (خرداد 89)

$$A(2, -3) \Rightarrow 8b + 5 = -3 \rightarrow b = -1 \quad f(-2) = 3 \Rightarrow -2a - 3 = 3 \Rightarrow a = -3$$

6- دو تابع  $y = x^2 + ax - 3b$  و  $y = -x + b$  داده شده‌اند. مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور  $x$  ها در نقطه‌ای به طول 1 همدیگر را قطع کنند. (خرداد 93)

$$(1, 0) \Rightarrow 0 = -1 + b \Rightarrow b = 1$$

$$(1, 0) \Rightarrow 0 = 1 + a - 3 \Rightarrow a = 2$$



7- در تابع خطی  $f(x) = ax + b$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که نمودار تابع، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کند و از نقطه (6, -4) بگذرد. (شهریور 93)

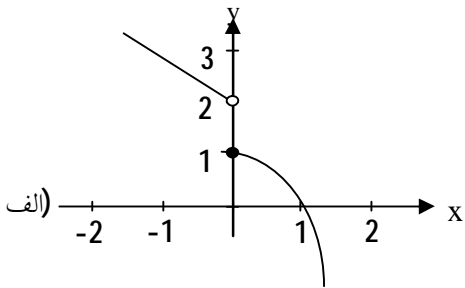
$$(0,3) \Rightarrow 3 = a \times 0 + b \Rightarrow b = 3 \quad 6 = -4a + 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

8- در معادله‌ی سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید که نمودار تابع از نقاط (0, -1) و (1, 0) و (2, 3) بگذرد. (دی 93)

$$(0, -1) \Rightarrow -1 = c \quad \begin{cases} (1,0) \Rightarrow a + b = 1 \\ (2,3) \Rightarrow 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0$$

9- دو تابع  $y = x^2 + ax + b$  و  $y = x + 2b$  مفروض‌اند.  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که نمودارهای این دو تابع روی محور  $x$ ها در نقطه‌ای به طول 2 یکدیگر را قطع کنند. (خرداد 88)

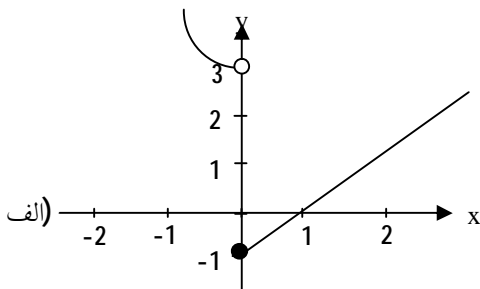
$$0 = 2 + 2b \Rightarrow b = -1 \quad \text{و} \quad 0 = 4 + 2a + b \Rightarrow 4 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$



10- تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$  داده شده است. (خرداد 94)

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید. ب) مقدار  $f(f(-2))$  را محاسبه کنید.

ب)  $f(-2) = 4 \Rightarrow f(f(-2)) = f(4) = -15$



11- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$  داده شده است. (خرداد 92)

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

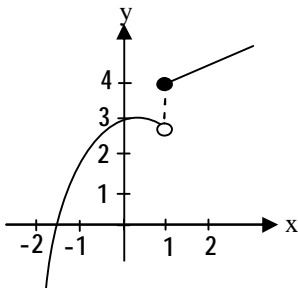
ب) حاصل  $f(f(-1)) = f(4) = 3$  را بدست آورید.

12- اگر  $f(x) = x^2 + ax - 3b$  باشد. مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که این سهمی محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول 3 قطع کند و از نقطه (4, -1) بگذرد. (خرداد 94)

$$-1 - 3b = -4 \Rightarrow b = 1 \quad \begin{cases} 9 + 3a - 3b = 0 \\ 1 + a - 3b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + 3a - 3 = 0 \\ 1 + a - 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 3a = 0 \\ a - 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$

14- معادله‌ی کلی سهمی به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. معادله یک سهمی را بیابید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کند و از نقاط (1, 2) و (0, -1) بگذرد. (دی 94)

$$(0, -1) \Rightarrow c = -1 \quad \begin{cases} (1,2) \Rightarrow a + b - 1 = 2 \\ (-1,0) \Rightarrow a - b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x - 1$$



15- تابع  $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 1 \\ x + 3 & x \geq 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. (دی 94)

الف) مقدار  $f(f(0))$  را محاسبه کنید.

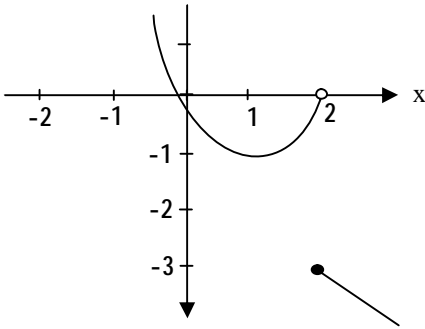
ب) نمودار تابع را رسم کنید.

16- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 2 \\ -2x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$  داده شده است. (شهریور 94)

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

ب) مقدار  $f(f(3))$  را محاسبه کنید.

$f(3) = -5 \Rightarrow f(f(3)) = 35$



17- اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید که این سهمی محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول 1 و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کند و از نقطه  $(-3, 2)$  نیز بگذرد (شهریور 94)

$$\begin{aligned} (1, 0) &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0 \\ (-2, 3) &\Rightarrow \end{aligned} \quad (0, -1) \Rightarrow c = -1$$

اعمال روی توابع؛ ترکیب توابع، تعیین دامنه‌ی ترکیب توابع:

برای تعیین دامنه‌ی تابع مرکب از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$D_{f \circ g}(x) = D_{f(g(x))} = \{x \mid x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_{g \circ f}(x) = D_{g(f(x))} = \{x \mid x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ f}(x) = D_{f(f(x))} = \{x \mid x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

بهبتر است در تعیین دامنه‌ی توابع مرکب، دامنه‌ها به شکل مقابل نوشته شوند.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow D_f : x \geq 1 \\ g(x) = \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow D_g : x \neq -2 \end{cases}$$

1- توابع  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  داده شده‌اند. (خرداد 93)

الف) تابع  $f \circ g$  را تشکیل دهید. ب) دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار  $(\frac{f-g}{2g})(4)$  را محاسبه کنید.

الف)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

ب)  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \neq 1\} = [0, +\infty) - \{1\}$

ب)  $(\frac{f-g}{2g})(4) = \frac{f(4)-g(4)}{2g(4)} = \frac{4-2}{2(2)} = \frac{1}{2}$

2- دو تابع  $f(x) = 3x^2 - 1$  و  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$  داده شده‌اند. (خرداد 90)

الف) ضابطه تابع  $g \circ f$  و دامنه  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف تعیین کنید. ب) مقدار  $(f - 3g)(1)$  را محاسبه کنید.

الف)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 1}{(3x^2 - 1)^2 - 4}$

ب)  $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 1 \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

ب)  $(f - 3g)(1) = f(1) - 3g(1) = 2 - 3(-\frac{1}{3}) = 3$

3- توابع  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = -2x+1$  داده شده است.  
الف) دامنه توابع  $f$  و  $g$  را بدست آورید.

ب) ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  و دامنه‌ی  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف تعیین کنید.  
پ) مقدار عددی  $(2f+g)(1)$  را محاسبه نمایید. (خرداد 88)

الف)  $D_f : 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1], D_g = \mathbb{R}$

ب)  $D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x+1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x \leq 0\} = [0, +\infty)$

$f \circ g(x) = \sqrt{1+2x-1} = \sqrt{2x}$

پ)  $(2f+g)(1) = 2f(1) + g(1) = 2\sqrt{0} + (-1) = -1$

4- توابع  $f(x) = \sqrt{x-4}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$  داده شده است.

الف) ضابطه‌ی تابع  $g \circ f$  را به دست آورید. ب) دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف آن به دست آورید. (خرداد 89)

الف)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2 - 1}$

ب)  $D_f = [4, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [4, +\infty) \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = [4, +\infty) - \{5\}$

5- الف) اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{x^2}$  باشد، دامنه  $\frac{f}{g}(x)$  را بدست آورید.

ب) اگر  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  و  $f(g(x)) = \frac{1}{x}$  باشد، ضابطه‌ی  $g(x)$  را بدست آورید. (خرداد 87)

الف)  $D_f : x \geq 0, D_g : x \neq 0 \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{x \mid x > 0\} - \{1\}$

ب)  $f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+g(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow xg(x) = 1+g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$

6- اگر  $g(x) = ax+b$  و  $f(x) = 2x-4$  باشد،  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:  $(g \circ f)(x) = 2x+5$  (خرداد 83)

$(g \circ f)(x) = a(2x-4) + b = 2ax - 4a + b = 2x + 5 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ -4(1) + b = 5 \Rightarrow b = 9 \end{cases}$

7- توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  داده شده‌اند:

الف) دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع  $g \circ f$  را تشکیل دهید.

پ) حاصل عبارت  $(2f-3g)(0)$  را به دست آورید. (خرداد 94)

الف)  $D_f = \mathbb{R}, D_g = [-1, 1] \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [-1, 1]\} = \mathbb{R}$

ب)  $(g \circ f)(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$  پ)  $2f(0) - 3g(0) = 0 - 3 = -3$

8- اگر  $f(x) = x+3$  و  $g(x) = \sqrt{1-x}$  دو تابع باشند. الف) دامنه  $f, g$  را بدست آورید.

ب) دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف محاسبه کنید. پ) ضابطه  $f \circ g$  را بنویسید. (خرداد 91)

الف)  $D_f = \mathbb{R}, 1-x \geq 0 \Rightarrow D_g = x \leq 1$  ب)  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 1\} = (-\infty, -2]$

پ)  $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x}) = \sqrt{1-x} + 3$

9- دو تابع  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  داده شده است. (دی 94)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید. ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید. ج) حاصل عبارت  $(\frac{2f}{g})(5)$  را محاسبه کنید.

الف)  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  ,  $D_g = [1, +\infty)$   $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow fog = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\} \Rightarrow D_{fog} = (1, +\infty)$

ب)  $(fog)(x) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$  ج)  $\frac{2f(5)}{g(5)} = \frac{2 \times \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5}$

10- توابع  $f(x) = \frac{x}{x-2}$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  داده شده‌اند.

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع fog را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت  $(f+g)(4)$  را بدست آورید. (شهریور 94)

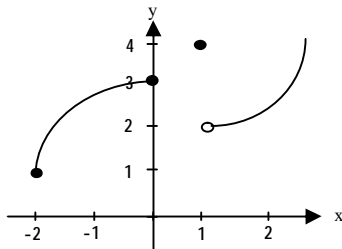
الف)  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$  ,  $D_g = [0, +\infty)$   $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{fog} = [0, +\infty) - \{4\}$

ب)  $(fog)(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$  ج)  $f(4) + g(4) = 2 + 2 = 4$

# فصل سوم

## حد

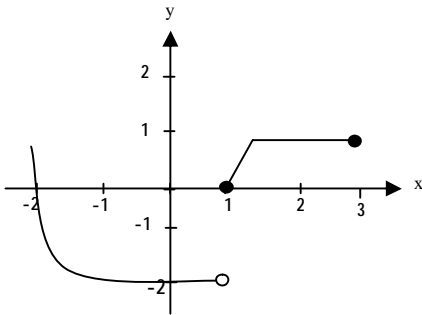
شرایط وجود حد از روی نمودار }  
 1- داشتن همسایگی در حداقل یک طرف نقطه‌ی مورد نظر  
 2- برابری حدود چپ و راست



1- با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را محاسبه کنید.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1) = 2 - 3(3) + 4 = -3$$

2- با توجه به نمودار تابع  $f$  حدود زیر را محاسبه کنید. (خرداد 88)



الف)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الف)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$

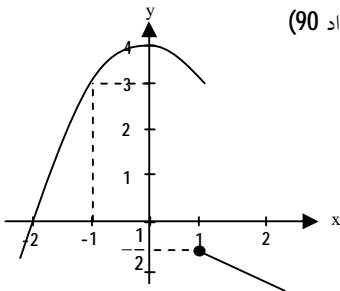
ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$

پ)  $0 \neq -2$  پس حد تابع در نقطه  $x=1$  وجود ندارد.

3- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \geq 1 \\ 4-x^2 & x < 1 \end{cases}$  را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در  $x=1$  بررسی کنید. (خرداد 90)



تابع در  $x=1$  حد ندارد  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \end{matrix} \right\}$

4- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4a} & x \geq 2 \\ x + b & -2 \leq x < 2 \\ x^2 + bx + 3a & x < -2 \end{cases}$  باشد  $a, b$  را طوری بیابید که تابع  $f$  در نقطه‌ی  $x = -2$  دارای حد بوده و  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$  باشد. (خرداد 88)

$$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2b + 3a = -2 + b \Rightarrow 3b - 3a = 6 \Rightarrow b - a = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{2 \times 4 - 4a} = 2 \Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$$

5- مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع  $f(x) = \begin{cases} |x+2| - a & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x=2$  دارای حد می‌باشد (دی 87)

$$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x+2| - a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2-a) = 2+2-a = 4-a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 7 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 4-a = 7 \Rightarrow a = -3$$

6- آیا تابع  $f(x) = \sqrt{x-3}$  وقتی  $x \rightarrow 3$  دارای حد است؟ چرا؟ (خرداد 87)

$$D_f = x \geq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$$

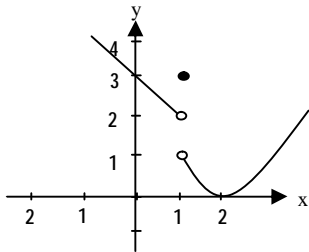
بله؛ حد دارد.

7- آیا تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ x & x = 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$  در  $x=1$  حد دارد؟ چرا؟ (خرداد 84)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{3(1)-1}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1^2+1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x=1 \text{ حد دارد.} \Rightarrow \text{حد راست} = \text{حد چپ}$$

8- تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3a & x < 1 \\ x - a & 1 \leq x \leq 4 \\ 5x^2 + bx + 4 & 4 < x \end{cases}$  مفروض است. عددهای  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  در  $x=4$  دارای حد بوده و

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 - a = 80 + 4b + 4 \Rightarrow a + 4b = -80 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2 - 3a = 2 \Rightarrow a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -20 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ باشد. (خرداد 83)}$$



9- با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید. (خرداد 92)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1) = 2 - 1 + 2 \times 3 = 7$$

محاسبه‌ی انواع حد

$$\frac{\text{عدد} (+)}{0^+} = +\infty \quad \text{و} \quad \frac{\text{عدد} (+)}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \frac{\text{عدد} (-)}{0^+} = -\infty \quad \text{و} \quad \frac{\text{عدد} (-)}{0^-} = +\infty$$

عدد  
صفر

\* صورت و منخرج چند جمله‌ای: حذف عامل ابهام در صورت و منخرج  
\* صورت یا منخرج یا هر دو رادیکالی: ضرب صورت و منخرج در مزدوج عبارت رادیکالی

صفر  
صفر

\* صورت و منخرج چند جمله‌ای: استفاده از قاعده پرتوان  
\* صورت یا منخرج یا هر دو رادیکالی: فاکتورگیری از پرتوان زیر رادیکال

$\infty$   
 $\infty$

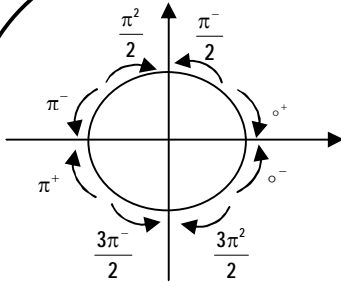
\* حالت غیر مبهم: کفایت جاگذاری کنیم.

\*  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$ : از دایره مثلثاتی برای تشخیص نوع صفر استفاده کنیم.

مثلثاتی

$$\frac{0}{0}^* \quad \text{و} \quad \frac{u}{\sin u} \quad \text{و} \quad \frac{\sin u}{u} \quad \text{و} \quad \frac{\tan u}{u} \text{ را می‌سازیم.}$$

دایره مثلثاتی:



حدهای مبهم

هریک از حدود زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} \quad (\text{خرداد 93})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} \times \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(3 + \sqrt{x+7})}{2-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} -(x+2)(3 + \sqrt{x+7}) = -24$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} \quad (\text{خرداد 86})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x+3)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} \quad (\text{خرداد 83})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(2x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{2x+3} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \quad (\text{خرداد 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{(x + \sqrt{x})} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5} \quad (\text{خرداد 88})$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\overbrace{4-x+1}^{(5-x)}}{(x-5)(x-1)(2 + \sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{(x-1)(2 + \sqrt{x-1})} = -\frac{1}{16}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} \quad (\text{خرداد 87})$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} \times \frac{(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})}{(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{\underbrace{(9-2x-1)(2 + \sqrt{x})}_{8-2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 + \sqrt{2x+1}}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{6}{8}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \quad (\text{خرداد 86})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2 - (\sqrt{2-x})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2 - (2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan(2x)}{x^2} \quad (\text{دی 91})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan(2x)}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 3 \times 2 = 6$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} \quad (\text{شهریور 90 و 88})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan x} \quad (\text{دی 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\sin x}{x} \right) \left( \frac{\sin x}{\tan x} \right) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1-\cos 2x} \quad (\text{خرداد 88 و 86})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{2\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{2\sin^2 x} = \frac{3}{2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (\text{خرداد 89})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{2}{4} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sin(4x - \pi)} \quad (\text{دی 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sin(4x - \pi)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x - \pi}{4 \sin(4x - \pi)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x - \pi}{\sin(4x - \pi)} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \tan 3x \tan 4x}{x^3} \quad (\text{خرداد 83})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \tan 3x \tan 4x}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 2x}{x} \times \frac{\tan 3x}{x} \times \frac{\tan 4x}{x} \right) = 2 \times 3 \times 4 = 24$$



16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$  (خرداد 94)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \frac{-1}{8}$$

17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$  (خرداد 94)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x \times x \times x} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1 - \cos 2x} \times \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right)$  (دی 94)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1 - \cos 2x} \times \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \times \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

قضیه فشردگی

1- فرض کنید به ازای هر  $x$  داشته باشیم  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$  در این صورت حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  را به دست آورید. (خارج از کشور)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) &= 2 - (0)^2 = 2 - 0 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x &= 2 \cos 0 = 2(1) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

2- اگر به ازای هر  $x$  داشته باشیم  $(x-2)^2 \leq 2f(x) \leq 4 + x^3$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 3)$  را به دست آورید. (خرداد 89)

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{4+x^3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^2}{2} &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x^3}{2} &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 3) = 5$$

3- اگر  $|f(x)| \leq 1 - \cos x$  باشد حد تابع  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow 0$  را بدست آورید. (دی 87)

$$\left. \begin{aligned} \cos x - 1 \leq f(x) \leq 1 - \cos x \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

4- اگر برای هر  $x > 0$  داشته باشیم  $(x-2)^2 \leq f(x) \leq 4 + \sin(x^3)$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + f(x))$  را بدست آورید. (دی 94)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)^2 &= 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (4 + \sin(x^3)) &= 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + f(x)) = 3 + 4 = 7$$

5- با استفاده از قضیه فشردگی، حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}$  (تالیفی)      ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x-3}$  (شهریور 85)

الف)  $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \xrightarrow{\times \sqrt[3]{x^2}} -\sqrt[3]{x^2} \leq \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x} \leq \sqrt[3]{x^2} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt[3]{x^2}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}) = 0$

ب)  $-1 \leq \sin \frac{1}{x-3} \leq 1 \xrightarrow{\times (x^2-9) > 0} -(x^2-9) \leq (x^2-9) \sin \frac{1}{x-3} \leq (x^2-9)$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} -(x^2-9) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2-9) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2-9) \sin \left( \frac{1}{x-3} \right) = 0$

در حالت  $x \rightarrow 3^-$  نیز به همین شکل است فقط جهت نامساوی عوض می شود بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-9) \sin \frac{1}{x-3} = 0$

حد بی نهایت

هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$  (خرداد 90)       $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{1 + \cos x}$  (شهریور 90)       $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{1 + \cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cot x$  (خرداد 88)       $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x = +\infty$        $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = -\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \tan(x + \frac{\pi}{3})$  (شهریور 87)       $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi^+}{6} + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi^+}{2}) = -\infty$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot^2 x$  (شهریور 84)       $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = \left( \frac{\cos 0}{\sin 0} \right)^2 = \left( \frac{1}{0} \right)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \tan(x + \frac{\pi}{3})$  (شهریور 87)       $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi^+}{6} + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi^+}{2}) = -\infty$

7)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$  (خرداد 88 و 84)       $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-(3^+)^2} = \frac{4}{9-9^+} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

8)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-5}{x+2}$  (خرداد 83)       $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-5}{x+2} = \frac{-2^+-5}{-2^++2} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$

9)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\cos x}$  (خرداد 86)       $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\cos \frac{\pi^+}{2}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{2x}$  (دی 94)       $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{2x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

11)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x+2}$  (شهریور 94)       $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

حد در بی نهایت:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} + \dots} = \begin{cases} \infty, & n > m \\ \frac{a}{a'}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$  حالت کلی

حدود زیر را محاسبه کنید.

1)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^2 + x}}{2x^3 + 1}$  (خرداد 93)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^2 + x}}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x} = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1}$  (خرداد 90)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$  (خرداد 88)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 - 1)(x + 1)}{x^3 - 2}$  (خرداد 86)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 - 1)(x + 1)}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 \times x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$

5)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 - 2x^2 + 5}{-2x^4 + 3x - 1}$  (خرداد 94)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 - 2x^2 + 5}{-2x^4 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3}{-2x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4}{x} = 0$

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + \sqrt{x + 2}}{x^2 + 5x - 1}$  (شهریور 94)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + \sqrt{x + 2}}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{5 - 3x}$  (دی 94)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{5 - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x}{-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-3x} = \frac{1}{3}$

8- a و b را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^b - x} = -\frac{2}{3}$  (خرداد 88)

$b = 3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^b - x} \xrightarrow{b=3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3}{6x^3} = \frac{a}{6} \Rightarrow \frac{a}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = -4$

پیوستگی

مقدار تابع = حد چپ = حد راست

شرط پیوستگی تابع f در نقطه  $x = a$ :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

1- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x < 2 \\ -1 & x = 2 \\ 3 - x^2 & x > 2 \end{cases}$  را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  بررسی کنید. (خرداد 93)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 - 4 = -1$

$f(2) = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = -1$  تابع f در  $x = 2$  پیوسته است.

2- حدود a را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} 2a + x^2 & x \geq 2 \\ x^3 - x & x < 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته نباشد. (خرداد 90)

$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2a + x^2) = 2a + 4$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x) = 6$

$\Rightarrow 2a + 4 \neq 6 = a \neq 1$

3- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$  را در نقطه‌ی  $x = 0$  بررسی کنید. (خرداد 87)

$$\lim_{x \rightarrow 0^0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^0} f(x) = f(0)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + \frac{-2x}{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + \frac{2x}{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ تابع نیست}$$

4- پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$  را در نقطه‌ی  $x = 1$  بررسی نمایید. (خرداد 83)

$$f(1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

$2 \neq \frac{1}{4} \Rightarrow x = 1$  پیوسته نیست

5- حدود  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \geq 1 \\ x^2 + 3x & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته نباشد. (خرداد 94)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 + a \end{cases} \Rightarrow -2 + a \neq 4 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{6\}$$

6- عددهای  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی  $x = -1$  پیوسته باشد. (شهریور 94)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & x > -1 \\ 5 & x = -1 \\ -3x + b & x < -1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 3 + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= a + 2 \\ f(-1) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 3, b = 2$$

7- مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه  $x = 3$  پیوسته باشد. (دی 94)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{|x-3|} & x < 3 \\ 2x^2 + ax & x \geq 3 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = -6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= f(3) = 18 + 3a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 18 + 3a = -6 \Rightarrow a = -8$$

## فصل چهارم

## مشق

## آهنگ تغییر

آهنگ تغییر متوسط: در تابع  $y=f(x)$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع  $f$  در بازه  $x_1$  تا  $x_2$  روی دامنه‌ی تابع، برابر است با:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای: در تابع  $f$ ، مقدار  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه‌ی  $x_0$  می‌نامند.

1- آهنگ متوسط تغییر  $f(x) = 2x - 1$  را وقتی متغیر از 3 به  $3/5$  تغییر می‌کند، به دست آورید. (خرداد 93)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3/5) - f(3)}{3/5 - 3} = \frac{6 - 5}{0/5} = 2$$

2- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = -x^2 + 5x$  داده شده است، آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از 1 به 3 تغییر می‌کند، به دست آورید. (شهریور 93)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

3- معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت  $x(t) = 3t^2 - 4t + 2$  است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی  $t = 1$  و  $t = 3$  محاسبه کنید. (خرداد 90)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{X(3) - X(1)}{3 - 1} = \frac{3(3)^2 - 4(3) + 2 - (3(1)^2 - 4(1) + 2)}{2} = \frac{17 - 1}{2} = 8$$

4- آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \frac{2}{x+1}$  وقتی متغیر  $x$  از 1 به  $1/2$  تغییر می‌کند را به دست آورید. (شهریور 87)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/2) - f(1)}{1/2 - 1} = \frac{\frac{2}{1/2+1} - \frac{2}{1+1}}{0/2} = \frac{\frac{2}{2/2} - 1}{0/2} = \frac{-0/2}{0/2} = \frac{-1}{2/2}$$

5- تابع  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  داده شده است. (خرداد 94)

الف)  $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{14 - 2}{2} = 6$

الف) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی از نقطه‌ی  $x_1 = 1$  به  $x_2 = 3$  تغییر می‌کند بنویسید

ب)  $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 6$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه‌ی  $x_0 = 2$  بدست آورید.

6- اگر  $P(t) = 3000 + 100t^2$  نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان  $t$  باشد ( $t$  برحسب ساعت) الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در 5 ساعت

الف) اول پس از زمان  $t_0 = 2$  بدست آورید.

$$\frac{P(7) - P(2)}{5} = \frac{7900 - 3400}{5} = \frac{4500}{5} = 900$$

ب)  $P'(t) = 200t \Rightarrow P'(3) = 600$

ب) آهنگ لحظه‌ای جمعیت را در  $t = 3$  به دست آورید. (شهریور 94)

7- آهنگ متوسط متغیر تابع  $y = \frac{x}{2} + 1$  را به ازای  $x_1 = 2$  و  $h = 0/2$  بدست آورید. (دی 94)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(2/2) - f(2)}{0/2} = \frac{2/1 - 2}{0/2} = \frac{0/1}{0/2} = \frac{1}{2}$$

تعریف مشتق

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{و} \quad f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = 3x - 1$  را در نقطه  $x = -1$  بدست آورید. (شهریور 91)

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1 + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x + 1)}{(x + 1)} = 3$$

2- مشتق تابع  $f(x) = 3x^2 - 4x$  را به کمک تعریف مشتق محاسبه کنید. (خارج از کشور - خرداد 90)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) - (3x^2 - 4x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x - 3x^2 + 4x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 4)}{\Delta x} = 6x + 3(0) - 4 = 6x - 4 \end{aligned}$$

3- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  را در نقطه  $x = 2$  به دست آورید. (خرداد 89)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x-1} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(x-1)(x-2)} = -1$$

4- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $y = \sqrt{4-x}$  را به دست آورید. (خرداد 88)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x-\Delta x} - \sqrt{4-x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4-x-\Delta x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x-\Delta x} + \sqrt{4-x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4-x-\Delta x-4+x}{\Delta x(\sqrt{4-x-\Delta x} + \sqrt{4-x})} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

5- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = x^3 + 2x$  را در  $x_0 = -1$  بدست آورید. (خرداد 91)

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 3)}{(x+1)} = 5$$

مشتق‌گیری و قوانین مشتق

$$y = c \rightarrow y' = 0, c \in \mathbb{R}$$

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$$

$$y = u \times v \rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

پرتکرار:

$$y = x \rightarrow y' = 1 \quad , \quad y = 2x \rightarrow y' = 2 \quad , \quad y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \cot x \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$$

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن لازم نیست)

1)  $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^4$  (خرداد 93)

$f'(x) = 4\left(\frac{2x+1}{x}\right)^3 \left(\frac{2x-(2x+1)}{x^2}\right)$

2)  $g(x) = (\sqrt{5-7x})\left(4-\frac{x}{3}\right)$  (خرداد 93)

$g'(x) = \frac{-7}{2\sqrt{5-7x}}\left(4-\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}(\sqrt{5-7x})$

3)  $h(x) = \tan x - 2\cos^3(2x)$  (خرداد 93)

$h'(x) = (1 + \tan^2 x) + 12\sin 2x \cos^2(2x)$

4)  $g(x) = (x^5 - 3x)(x+1)^4$

$g'(x) = (5x^4 - 3)(x+1)^4 + 4(x+1)^3(x^5 - 3x)$

5)  $g(x) = \frac{-x^2 + x}{\frac{x}{3} + 2}$  (خرداد 89)

$g'(x) = \frac{(-2x+1)\left(\frac{x}{3}+2\right) - \left(\frac{1}{3}\right)(-x^2+x)}{\left(\frac{x}{3}+2\right)^2}$

6)  $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^4 + \frac{1}{2x+1}$  (خرداد 88)

$f'(x) = 4(3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^3 + \frac{-2}{(2x+1)^2}$

7)  $f(x) = (1-4x^3)\sqrt{1+2x+x^2}$  (خرداد 89)

$f'(x) = (-12x^2)\sqrt{1+2x+x^2} + \frac{2+2x}{2\sqrt{1+2x+x^2}}(1-4x^3)$

8)  $h(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}$  (خرداد 88)

$h'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x^3 - 3x^2(\sqrt{4-x^2})}{x^6}$

9)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x}$  (خرداد 87)

$f'(x) = \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$

10)  $h(x) = \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \cot x$  (خرداد 90)

$h'(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + (1 + \cot^2 x)$

11)  $g(x) = \sin \sqrt{x} \cos 2x$  (خرداد 88)

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \times \cos 2x - 2 \sin 2x \times \sin \sqrt{x}$

12)  $g(x) = 5\sin^2(x-1) - \cot \sqrt{x}$  (خرداد 87)

$g'(x) = 2 \times 5 \cos(x-1) \sin(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \cot^2 \sqrt{x})$

13)  $f(x) = \frac{(x-2)^5}{x^2-3x}$  (خرداد 94)

$f'(x) = \frac{5(x-2)^4(x^2-3x) - (2x-3)(x-2)^5}{(x^2-3x)^2}$

14)  $g(x) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)$  (خرداد 94)

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\sqrt{x}$

15)  $h(x) = \cos^2(5x) - \tan(x^3-4x)$  (خرداد 94)

$h'(x) = -10\sin(5x)\cos(5x) - (3x^2-4)(1 + \tan^2(x^3-4x))$

16)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x}$  (شهریور 94)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-3x) - (2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(x^2-3x)^2}$

17)  $g(x) = (2x-3)^4(x^2+5x)$  (شهریور 94)

$g'(x) = 4 \times 2 \times (2x-3)^3(x^2+5x) + (2x-3)^4(2x+5)$

$$18) h(x) = \sin^3(2x) - \cos(x^2) \quad (\text{شهریور } 94)$$

$$h'(x) = 6 \sin^2 2x \cos 2x + 2x \sin x^2$$

$$19) f(x) = \frac{(2x-5)^4}{5x^2+6x} \quad (\text{دی } 94)$$

$$f'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x-5)^3 (5x^2+6x) - (10x+6)(2x-5)^4}{(5x^2+6x)^2}$$

$$20) g(x) = \cos\left(\pi + \frac{x}{4}\right) + \tan 3x \quad (\text{دی } 94)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{4} \sin\left(\pi + \frac{x}{4}\right) + 3(1 + \tan^2 3x)$$

$$h(x) = (7+x^3) \times \sqrt{4x^2+7} \quad (\text{دی } 94)$$

$$h'(x) = 3x^2 \sqrt{4x^2+7} + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+7}} (7+x^3)$$

شیب خط مماس و قائم:  $f'(x_0) =$  شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f(x)$  در نقطه‌ای  $x_0$

1- شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+5}$  را در نقطه‌ای به طول  $x=4$  بدست آورید. (خرداد 90)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \Rightarrow f'(4) = m = \frac{1}{2\sqrt{4+5}} = \frac{1}{6}$$

2- شیب خط مماس بر منحنی تابع  $y = \sin x + \cos 2x$  را در نقطه‌ای به طول  $\pi$  واقع بر منحنی بنویسید. (خرداد 89)

$$y' = \cos x - 2 \sin 2x \Rightarrow m = -1$$

3- شیب خط مماس بر منحنی  $y = \frac{x+3}{1-x}$  را در نقطه‌ی تقاطعش با محور طول‌ها بنویسید. (شهریور 88)

$$y=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow (-3,0)$$

$$y' = \frac{4}{(1-x)^2} \xrightarrow{x=-3} m = \frac{1}{4}$$

4- شیب خط مماس بر نمودار تابع  $y = x^3 - 2x$  را در نقطه‌ی  $x=1$  بدست آورید. (شهریور 94)

$$y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(1) = 1$$

5- معادله‌ی خط قائم بر منحنی  $y = x^3 + 2x$  را در نقطه‌ی  $x=1$  بنویسید. (تالیفی)

$$m = y' = 3x^2 + 2 = 3(1)^2 + 2 = 5 \rightarrow m' = -\frac{1}{5} \quad x=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$

### مشتق پذیری

1- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید (خرداد 93)

الف) دامنه مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  برابر است با .....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع  $g(x) = \frac{1}{x}$  در  $x=1$  برابر است با .....

الف)  $D_{f'} = (0, +\infty)$

ب)  $m = -1$

2- دامنه مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \sqrt{x-2}$  را بدست آورید. (دی 93)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \rightarrow D_{f'} = (2, +\infty)$$