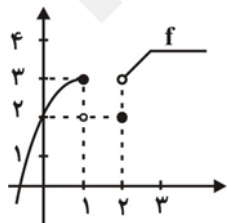


مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ریاضی ۳	نمونه سؤال‌های امتحان نهایی
www.kanoon.ir		مقطع سوم تجربی

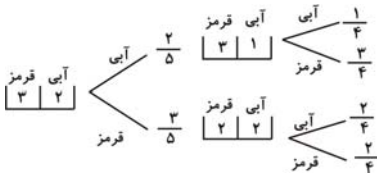
ردیف	سؤال	نمره
۱	از یک جعبه که شامل ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز است ۲ مهره به تصادف و به طور متوالی خارج می‌کنیم. حساب کنید احتمال این‌که: (آ) مهره اول آبی و مهره دوم قرمز باشد. (ب) حداقل یک مهره آبی باشد.	۱
۲	مادری دارای ۳ فرزند است. مطلوب است احتمال آن‌که: (آ) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. (ب) دو فرزند آخر پسر باشد.	۱/۵
۳	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{ x-2 }{3} \leq \frac{1}{2}\}$ و $B = [0, 3)$ باشد، حاصل $A \cap B$ را به صورت بازه بنویسید.	۱
۴	توابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ داده شده است. (آ) ضابطه‌ی تابع $g \circ f$ را تعیین کنید. (ب) دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف آن به دست آورید.	۱/۲۵
۵	در تابع $y = ax^2 + bx + 1$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا نمودار تابع از نقطه $(1, 1)$ گذشته و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.	۱
۶	توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مفروض‌اند. مطلوب است: (آ) $(f+g)(4)$ (ب) $D_{\frac{f}{g}}$	۱
۷	با توجه به نمودار تابع f ، حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 2f(3)$ را به دست آورید:	۱



۵	<p>حدود زیر را محاسبه کنید.</p> <p>(آ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$</p> <p>(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2-1)(x+1)}{x^3-2}$</p> <p>(ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]+1}{x-3}$</p> <p>(د) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$</p> <p>(ه) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$</p> <p>(و) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x$</p>	۸
۱	<p>فرض کنید به ازای $-1 \leq x \leq 1$ داشته باشیم: $\sqrt{3-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{3+x^2}$، حد تابع $\frac{1}{f(x)}$ را وقتی $x \rightarrow 0$ تعیین کنید.</p>	۹
۱/۵	<p>پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.</p>	۱۰
۰/۷۵	<p>فاصله پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ را به صورت بازه بنویسید.</p>	۱۱
۱	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $x = t^2 - 5t + 6$ می‌باشد. اولاً: سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی از لحظه $t_1 = 3$ تا $t_2 = 5$ به دست آورید. ثانیاً: آهنگ آنی تغییرات x را در $t = 2$ به دست آورید.</p>	۱۲
۲	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>(آ) $f(x) = (\Delta x^3 - 2x + 1)^4$</p> <p>(ب) $g(x) = \sin^2 x - \cos \frac{x}{4}$</p> <p>(ج) $h(x) = \sqrt{\frac{3x}{x+2}}$</p>	۱۳
۱	<p>با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در نقطه‌ی $x = 0$ به دست آورید.</p>	۱۴

کانون فرهنگی آموزش

ریاضی



۱- A: پیشامد آبی بودن مهره‌ی اول
B: پیشامد آبی بودن مهره‌ی دوم

$$P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad (0.5) \quad \text{آ}$$

$$P(B|A) + P(B|\bar{A}) + P(\bar{B}|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad (0.5) \quad \text{ب}$$

$$n(S) = 2^3 = 8, \quad A = \{ggg, ggb, gbg, bbg\} \quad -2$$

$$\Rightarrow P(\text{حداکثر یک پسر}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (0.75) \quad \text{آ}$$

$$P(\text{دو فرزند آخر پسر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad B = \{gbb, bbb\} \Rightarrow \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{8} \quad (0.75) \quad \text{ب}$$

$$|x-2| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x-2 \leq \frac{3}{2} \quad (0.25) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \quad (0.25) \quad -3$$

$$A \cap B = [\frac{1}{2}, 3) \quad (0.5)$$

$$\bar{1} - (gof)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2 - 1} \Rightarrow \frac{1}{x-4-1} = \frac{1}{x-5} \quad (0.25) \quad -4$$

$$D_f = [4, +\infty) \quad (0.25), \quad D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (0.25)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = [4, +\infty) - \{5\} \quad (0.25)$$

$$y = ax^2 + bx + 1 \quad -5$$

$$(1, 1) \in \text{تابع} \Rightarrow 1 = a(1)^2 + b(1) + 1 \Rightarrow a + b = 0 \quad (0.25)$$

عرض نقاط واقع بر محور Xها صفر است.

$$(-1, 0) \in \text{تابع} \Rightarrow 0 = a - b + 1 \Rightarrow a - b = -1 \quad (0.25) \quad \begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (0.25), \quad b = \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

$$(f+g)(4) = \sqrt{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad (0.25) \quad \text{آ-6}$$

$$\begin{cases} D_f : x \geq 0 \\ D_g : x \neq 0 \end{cases} \quad (0.25) \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{x \mid x > 0\} \quad (0.25) \quad \text{ب}$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 2f(3) = 3(3) - 3 + 2(4) = 14 \quad (0.25) \quad -7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3} \quad \text{آ-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 3x^2 - x - 1}{x^3 - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3 \quad (0.25) \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]+1}{x-3} = \frac{2+1}{0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad (0.25) \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0 \quad (./\ 25) \quad (د)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times 2 = 2 \quad (./\ 25) \quad (هـ)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (./\ 25) \quad (و)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 - 2x^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 - 2x^2} = \sqrt{3} \quad (./\ 25) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + x^2} = \sqrt{3} \quad (./\ 25) \end{cases} \quad \text{۹- طبق قضیه فشردگی داریم:}$$

$$\sqrt{3} \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{3} \quad (./\ 25) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (./\ 25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2} \quad (./\ 25) \quad -10$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad (./\ 25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \quad (./\ 25) \Rightarrow \text{پس تابع در } x=1 \text{ پیوسته نیست.} \quad (./\ 25)$$

$$\frac{-2}{x+1} \geq 0 \quad (./\ 25) \Rightarrow x+1 < 0 \quad (./\ 25) \Rightarrow x < -1 \Rightarrow D_f : (-\infty, -1) \quad (./\ 25) \quad \text{۱۱- تعیین دامنه می‌کنیم:}$$

دقت کنید: صورت کسر $\frac{-2}{x+1}$ منفی بود پس برای این که کسر مثبت شود باید مخرجش هم منفی باشد.

$$t_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 6 \quad -12$$

$$t_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{سرعت متوسط: } \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{6 - 0}{5 - 3} = 3 \quad (./\ 25)$$

$$\text{آهنگ آنی: } x'_t = 2t - 5 \xrightarrow{t=2} x'(2) = -1 \quad (./\ 25)$$

$$f'(x) = 4(15x^2 - 2)(5x^3 - 2x + 1)^3 \quad (./\ 5) \quad (آ-۱۳)$$

$$g'(x) = 2 \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \quad (./\ 5) \quad (ب)$$

$$h'(x) = \frac{3(x+2) - 3x}{(x+2)^2} \quad (./\ 5)$$

$$2\sqrt{\frac{3x}{x+2}} \quad (./\ 5) \quad (ج)$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1 \quad (./\ 25)$$